Práctica 8 - Segunda parte

Nota: En esta práctica los anillos son conmutativos y tienen unidad.

1. Sea R un anillo y sean $I, J \subseteq R$ ideales. Probar que:
   (a) $I \subseteq \sqrt{I}$
   (b) Si $I \subseteq J$ entonces $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$
   (c) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$
   (d) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$
   (e) Si P es primo, $\sqrt{P} = P$.

2. Sean R un DFU y $f \in R$. Sea $I = (f)$. Supongamos que $f = q_1^{\alpha_1} \dots q_r^{\alpha_r}$ con $q_i \in R$ irreducibles distintos. Probar que $\sqrt{I} = (f_{\text{red}})$, donde $f_{\text{red}} = q_1 \dots q_r \in R$.

3. Probar que los subconjuntos algebraicos propios de $\mathbb{A}^1(k)$ son los conjuntos finitos.

4. Sean $V = V(f) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$ una curva y $L = V(y - aX - b) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$ una recta, con $L \not\subseteq V$. Si f es un polinomio de grado n, probar que $L \cap V$ tiene a lo sumo n puntos.

5. Hallar las componentes irreducibles de los siguientes conjuntos algebraicos:
   (a) $V(y^2 - x(x^2 - 1)) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$
   (b) $V(y^2 - xy - x^2y + x^3) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$
   (c) $V(x^2 + y^2 - 1, x^2 - z^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}^3(\mathbb{C})$.

6. Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ un conjunto algebraico. Probar que hay una correspondencia biunívoca entre los subconjuntos algebraicos de V y los ideales radicales de $\mathcal{O}(V)$.

7. Probar que los siguientes anillos son dominios y, además, que:
   (a) $\mathbb{C}[x, y]/(xy - 1)$ es integralmente cerrado.
   (b) $\mathbb{C}[x, y]/(x^2 - y^3)$ no es integralmente cerrado.

8. Sean $R \subseteq S$ dominios. Supongamos que $h \in R[x]$ se factoriza en $S[x]$ como producto de dos polinomios mónicos, $h = fg$. Probar que los coeficientes de f y de g son enteros sobre R. (Sugerencia: Cualquier raíz de f en una extensión de R es entera sobre R.) Deducir que si R es integralmente cerrado en S, entonces $f, g \in R[x]$.

9. Sean $R \subseteq S$ dominios y sea $U \subseteq R$ un sistema multiplicativo. Sea $\tilde{R}$ la clausura entera de R en S. Probar que $U^{-1}\tilde{R}$ es la clausura entera de $U^{-1}R$ en $U^{-1}S$.

10. Para $R = \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^3)$ y $R = \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^2(x - 1))$ probar que:
    (a) R es dominio
    (b) Si K es el cuerpo de cocientes de R y $t = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \in K$ entonces $K = \mathbb{C}(t)$ y $\mathbb{C}[t]$ es la clausura entera de R en K.