Práctica 8

Extensiones trascendentes

1. Sea K un cuerpo y sean α algebraico sobre K y t trascendente sobre K. Probar que α es algebraico sobre $K(t)$ y que $\boldsymbol{m}(\alpha, K) = \boldsymbol{m}(\alpha, K(t))$.

2. Sean L_1 y L_2 dos subextensiones de una extensión E/K. Probar que
$$\operatorname{trdeg}(L_1 L_2/K) \leq \operatorname{trdeg}(L_1/K) + \operatorname{trdeg}(L_2/K).$$

3. Sea E/K una extensión con E algebraicamente cerrado. Sea $\varphi : E/K \to E/K$ un morfismo de extensiones. Probar que si $\operatorname{trdeg}(E/K) < \infty$ entonces φ es un isomorfismo. Mostrar que ésto no vale si $\operatorname{trdeg}(E/K) = \infty$.

4. Sea t trascendente sobre $\mathbb{C}$ y sea K la clausura algebraica de $\mathbb{C}(t)$. Probar que $K \simeq \mathbb{C}$.

Anillos locales

5. Sea R un anillo. Probar que son equivalentes:
   (a) El conjunto de elementos no inversibles de R forma una ideal.
   (b) R es un anillo local, es decir, tiene un único ideal maximal $\mathfrak{m}$.

6. Probar que un anillo local R no contiene idempotentes distintos de 1 y 0. (Un *idempotente* es un elemento $e \in R$ tal que $e^2 = e$.)

7. Sean $(R, \mathfrak{m})$ un anillo local y M un R-módulo finitamente generado. Supongamos que $x_1, \ldots, x_k \in M$ son tales que $\{\bar{x_1}, \ldots, \bar{x_k}\}$ genera $M/\mathfrak{m}M$ como $R/\mathfrak{m}$-espacio vectorial. Probar que $x_1, \ldots, x_k$ generan M como R-módulo. (Sugerencia: usar Nakayama.)