
ÁLGEBRA II

Segundo Cuatrimestre — 2013

Práctica 5

- Sean A y B anillos conmutativos, \mathcal{P} un ideal primo de B y $f : A \longrightarrow B$ un morfismo de anillos. Pruebe que $f^{-1}(\mathcal{P})$ es un ideal primo.
- Caracterice los anillos cocientes
 - $\mathbb{Z}[X]/\langle 2, X \rangle$
 - $\mathbb{Z}[X]/\langle 2 \rangle$
 - $\mathbb{Z}[X]/\langle 2X \rangle$
 - $\mathbb{Z}[X]/\langle X^2 \rangle$
 - $\mathbb{Z}[X]/\langle X^2 + 1 \rangle$
 - $\mathbb{Z}[X]/\langle X^2 + X + 1 \rangle$
 - $\mathbb{Z}[i]/\langle 2 \rangle$
 - $\mathbb{Z}[i]/\langle 2, 1 + i \rangle$
- Sean A un anillo conmutativo con unidad y A' subanillo con $1 \in A'$. Pruebe o dé un contraejemplo:
 - A cuerpo $\Rightarrow A'$ cuerpo
 - A dominio íntegro $\Rightarrow A'$ dominio íntegro
 - A' dominio íntegro $\Rightarrow A$ dominio íntegro
- ¿Es $\det : M_n(A) \longrightarrow A$ un morfismo de anillos? ¿y la traza?
- Muestre un isomorfismos de
 - $\mathbb{Q}[X]/\langle X^3 + X \rangle \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}(i)$
 - $\mathbb{R}[X]/\langle X^4 - 1 \rangle \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}$
- Sean A anillo conmutativo y $f \in A[X]$, $f \neq 0$. Pruebe que f es divisor de cero en $A[X]$ si, y sólo si, existe $r \in A \setminus \{0\}$ tal que $rf = 0$.
- Sea \mathbb{K} un cuerpo. Pruebe que los siguientes anillos son euclidianos.
 - $\mathbb{K}[X, X^{-1}]$, polinomios de Laurent con coeficientes en \mathbb{K} .
 - $\mathbb{K}[[X]]$, series formales con coeficientes en \mathbb{K} .
- Sean A dominio íntegro y $a \in A$. Pruebe que:
 - a primo $\Rightarrow a$ irreducible
 - A DFU, a irreducible $\Rightarrow a$ primo
 - En $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$: $3, 7, 4 + \sqrt{-5}, 1 + 2\sqrt{-5}, 1 - 2\sqrt{-5}$ son irreducibles y no primos. ¿Es $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ DFU? ¿Es DF?
- $A \subseteq B \subseteq C$ dominios íntegros. Busque algún ejemplo de A y C DFU, pero B no.

10. A dominio íntegro, I ideal propio de A ; $\pi : A \longrightarrow A/I$ la proyección canónica. Sean $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in A[X]$ mónico y $\bar{f} = \sum_{i=0}^n \pi(a_i) X^i \in A/I[X]$.
Pruebe que:
 f es reducible en $A[X] \Rightarrow \bar{f}$ es reducible en $(A/I)[X]$
11. Sea A DFU y \mathbb{K} su cuerpo de cocientes.
- Pruebe que si $f, g \in A[X]$ son polinomios primitivos, fg es primitivo.
 - Pruebe que si $f \in A[X]$ es irreducible, entonces visto como polinomio con coeficientes en \mathbb{K} también es irreducible.
 - Pruebe que si $f \in A[X]$ es primitivo y f es irreducible en $\mathbb{K}[X]$ entonces f es irreducible en $A[X]$.
 - Pruebe que $A[X]$ es DFU.
12. **Criterio de irreducibilidad de Eisenstein:** Sea A un DFU y \mathbb{K} su cuerpo de cocientes. Sea $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in A[X]$. Supongamos que exista un primo $p \in A$ tal que:
- p no divide a a_n
 - p divide a a_i , $0 \leq i \leq n-1$
 - p^2 no divide a a_0
- Pruebe que f es irreducible en $\mathbb{K}[X]$
13. **Lema de Gauss:** Sea A un DFU y \mathbb{K} su cuerpo de cocientes.
Sea $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in A[X]$ con $a_0 \neq 0$. Si p y q son elementos de A no nulos, coprimos entre sí tales que $\frac{p}{q} \in \mathbb{K}$ es raíz de f , demuestre que p/a_0 y q/a_n en A .
14. Pruebe que todo **ideal primo** de $\mathbb{Z}[X]$ es alguno de los siguientes:
- $\langle p \rangle$ ó $\langle p, f \rangle$ con $p \in \mathbb{Z}$ primo, $f \in \mathbb{Z}[X]$ tal que $\bar{f} \in \mathbb{Z}_p[X]$ es irreducible en $\mathbb{Z}_p[X]$
 - $\langle f \rangle$ donde f es primitivo e irreducible en $\mathbb{Q}[X]$
15. Caracterice los anillos cocientes:
- $\mathbb{R}[X, Y, Z] / \langle X, Y \rangle$
 - $\mathbb{R}[X, Y, Z] / \langle X - Y^5 \rangle$
 - $\mathbb{R}[X, Y, Z] / \langle Y - Z^3, Z - X^3 \rangle$
16. Muestre que $X^2 + Y^2 - 1$ y $XT - YZ$ son irreducibles en $\mathbb{Q}[X, Y]$ y $\mathbb{Q}[X, Y, Z, T]$ respectivamente.
17. Sea $I = \langle Y + X^2 - 1, XY - 2Y^2 + 2Y \rangle \subset \mathbb{R}[X, Y]$. Decida si $\mathbb{R}[X, Y]/I$ es un cuerpo.