Nombre y Apellido	LU	Turno	1	2	3	4	5	Nota

Matemática 2 - Segundo cuatrimestre de 2013
Primer parcial - 10/10/2013

---

1. En cada caso decidir si el conjunto S es un k-subespacio del k-espacio vectorial V. En caso afirmativo hallar una base de S y calcular su dimensión.

   Observación: Para que S sea un subespacio de V, debe ser cerrado para la suma y el producto por escalares. Para ver que algo *no* es subespacio alcanza con que alguna de estas dos condiciones deje de cumplirse en *un* caso, es decir, alcanza con mostrar dos elementos de S cuya suma no pertenezca a S, o un elemento de S y un escalar cuyo producto no pertenezca a S.

   a) $k = \mathbb{C}$, $V = M_3(\mathbb{C})$, $S = \{A \in M_3(\mathbb{C}) : \det(A) = 0\}$.
   Respuesta: El conjunto S no es un subespacio, porque no es cerrado para la suma. Consideremos las matrices

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Es claro que $\det(A) = \det(B) = 0$, es decir que $A \in S$ y $B \in S$, y además que $A + B$ es la matriz identidad de $M_3(\mathbb{C})$, que tiene determinante 1, es decir que $A + B \notin S$.

   b) $k = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $S = \{(n, n) \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{Z}\}$.
   Respuesta: El conjunto S no es un subespacio porque no es cerrado por producto por escalares. Por ejemplo, $(1, 1) \in S$, pero $\frac{1}{2}(1, 1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \notin S$.

   c) $k = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}_3[X]$, $S = \{p \in \mathbb{R}_3[X] : p(1) = p(0), p(0) = p(-1)\}$.
   Respuesta: El conjunto S es un subespacio. Una forma de verlo es la siguiente: si $p, q \in S$, entonces $(p + q)(1) = p(1) + q(1)$ y como p y q están en S, tenemos que esto es igual a $p(0) + q(0) = (p + q)(0)$, luego $(p + q)(1) = (p + q)(0)$. De la misma manera $(p + q)(0) = (p + q)(-1)$, así que S es cerrado para la suma. Para ver que S es cerrado para el producto, tomamos $\lambda \in \mathbb{R}$ y $p \in S$, y señalamos que $(\lambda p)(1) = \lambda(p(1)) = \lambda(p(0)) = (\lambda p)(0)$, y de la misma forma se ve que $(\lambda p)(0) = (\lambda p)(-1)$, así que S es cerrado por producto por escalares.
   Otra forma es plantear que, si $p = aX^3 + bX^2 + cX + d$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, entonces

   $$p(1) = a + b + c + d \qquad p(0) = d \qquad p(-1) = -a + b - c + d$$

   De modo que $p \in S$ si y sólo si estos tres números son iguales. Pero esto es equialente a que $b = 0$ y $a = -c$. Es decir que los polinomios de S son de la forma $p = aX^3 - aX + d = a(X^3 - X) + d$, y cualquier polinomio con esta forma pertenece a S. Luego $S = \langle X^3 - X, 1 \rangle$.
   Finalmente, sabiendo que $S = \langle X^3 - X, 1 \rangle$, observamos que $\{X^3 - X, 1\}$ es una base, ya que los polinomios son li. Y entonces la dimensión de S es 2.

2. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En los casos verdaderos dar una demostración y en los casos falsos dar un contraejemplo.

   a) Existe una única función $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que f es transformación lineal, $f(1,1,0,0) = (5,2,0)$, $f(1,0,0,1) = (0,2,1)$ y $f(0,0,1,0) = (1,1,1)$.

   Respuesta: Falsísimo. Una transformación lineal queda definida por sus valores en una base. Aunque el conjunto $\{(1,1,0,0); (1,0,0,1); (0,0,1,0)\}$ son linealmente independientes, no forman una base de $\mathbb{R}^4$. De modo que la podemos completar agregando, digamos $(0,0,0,1)$ y elegir la imagen de este último elemento de la base. Dado cualquier $v \in \mathbb{R}^3$, si elegimos $f(0,0,0,1) = v$, obtenemos una transformación lineal que satisface las condiciones. Pero claramente, para cada v obtenemos una distinta, ya que cada una manda al vector $(0,0,0,1)$ a un vector distinto. Es decir que no sólo no hay una única función que cumple lo pedido, hay infinitas!

   b) Si una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es sobreyectiva pero no inyectiva, entonces f no es una transformación lineal.

   Respuesta: Verdadero. Si f fuera una transformación lineal, por el teorema de la dimensión tendríamos que $\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim \mathbb{R}^3 = 3$. Como f es sobreyectiva $\dim \operatorname{im} f = 3$, y eso obliga a que $\dim \ker f = 0$, o sea que f es inyectiva, contradicción. La contradicción provino de suponer que f era una transformación lineal.

   c) Si una función $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ es inyectiva pero no sobreyectiva, entonces f no es una transformación lineal.

   Respuesta: Falso. Demos un par de ejemplos: $f(p) = Xp$, o más rara, definiéndola sobre una base $f(X^n) = X^{2n}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Se puede demostrar que estas funciones son transformaciones lineales inyectivas, pero no sobreyectivas.

   Veamos el primer ejemplo: f es una transformación lineal: por un lado, si p, q son polinomios, $f(p+q) = X(p+q) = Xp + Xq = f(p) + f(q)$. Por otro lado, si p es un polinomio y $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda p) = X\lambda p = \lambda X p = \lambda f(p)$. Además, se ve fácilmente que f no es sobreyectiva, ya que los polinomios constantes (salvo el 0) no están en la imagen de f. Por último, f es inyectiva, es decir, es un monomorfismo (ya vimos que es tl): si $p \in \mathbb{R}[X]$ es distinto del polinomio nulo, y $f(p) = 0$, entonces $Xp = 0$. Pero el producto de dos polinomios no nulos, X y p, no puede ser nulo. De hecho, debe tener grado igual a la suma de sus grados, es decir, el grado de p más uno.

   Observación: el razonamiento del ítem anterior no se puede aplicar porque el teorema de la dimensión vale solo para espacios de dimensión finita.

3. Sean k un cuerpo, V, W k-espacios vectoriales y $f : V \to W$ una transformación lineal. Probar que $\ker(f) \subseteq f^{-1}(L)$ para todo L subespacio vectorial de W.

   Respuesta: Recordar que $f^{-1}(L)$ es el conjunto de vectores de V cuya imagen cae en L. Sea $x \in \ker f$, entonces tenemos que $f(x) = 0$. Pero $0 \in L$, porque L es un subespacio. Entonces $f(v) \in L$, es decir, $v \in f^{-1}(L)$.

4. Consideremos la base $B = \{(1,0,0,0); (1,2,0,0); (1,2,3,0); (1,2,3,4)\}$ de $\mathbb{R}^4$ y la transformación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$[f]_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Dar una base de $\ker(f)$ y una base de $\operatorname{im}(f)$.

Respuesta: Claramente $|f|_B$ tiene rango 2, así que la dimensión de la imagen de f es 2, y por el teorema de la dimensión, la dimensión de $\ker f$ también es 2.

Notar que $[f(1,0,0,0)]_B = (1,1,1,1)$, es decir que

$$\begin{aligned} f(1,0,0,0) &= 1(1,0,0,0) + 1(1,2,0,0) + 1(1,2,3,0) + 1(1,2,3,4) \\ &= (4,6,6,4), \end{aligned}$$

y de la misma manera $f(1,2,0,0) = (3,4,3,4)$. Como estos dos vectores son li, generan un espacio de dimensión 2 que necesariamente debe ser $\operatorname{im} f$. Luego $\{(4,6,6,4), (3,4,3,4)\}$ es una base de la imagen.

Además $f(1,2,3,0) = f(1,2,3,4) = (0,0,0,0)$, y como ambos vectores son l.i. y la dimensión del núcleo es 2, $\{(1,2,3,0); (1,2,3,4)\}$ es una base del núcleo.

b) Decidir si es cierto que $\mathbb{R}^4 = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$.

Respuesta: Notar que $(4,6,6,4) - (3,4,3,4) = (1,2,3,0)$, y por lo tanto este vector pertenece tanto al núcleo como a la imagen. Como $\ker f \cap \operatorname{im} f$ no es el espacio $\{0\}$, la suma no puede ser directa.

5. Sea $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ la transformación lineal definida por $f(A) = A - A^t$ y sea B una base $M_2(\mathbb{R})$. Calcular $\det([f]_{BB})$.

Respuesta: Recordemos primero que si B y B' son bases de $M_2(\mathbb{R})$, entonces

$$\begin{aligned} \det(|f|_{B'}) &= \det(C(B,B')|f|_B C(B',B)) \\ &= \det(C(B,B')) \det(|f|_B) \det(C(B',B)) = \det(|f|_B). \end{aligned}$$

La última igualdad vale porque $C(B',B) = C(B,B')^{-1}$ así que sus determinantes son uno el inverso del otro. Conclusión, el valor de $\det(|f|_B)$ no depende de la base, solo de f. Fijo entones una base cualquiera, por ejemplo la canónica. Llamo E_{11} a la matriz que tiene un 1 en la posición $(1,1)$ y cero en el resto, y análogamente para la otras. Entonces

$$\begin{aligned} f(E_{11}) &= E_{11} - E_{11}^t = 0 & \qquad f(E_{12}) &= E_{12} - E_{12}^t = E_{12} - E_{21} \\ f(E_{21}) &= E_{21} - E_{12} & f(E_{22}) &= 0. \end{aligned}$$

Entonces la matriz de f en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que claramente tiene determinante cero. Obvio que f tiene determinante cero, si ya en la primera cuenta se veía que tenía núcleo no trivial, así que no era inversible.