Matemática 2 - Segundo Cuatrimestre de 2013

Práctica 7

Espacios con producto interno

1. Sea V un espacio vectorial sobre k (donde k puede ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y $\mathcal{B}$ una base de V.

   a) Mostrar que existe exactamente un producto interno sobre V que hace de $\mathcal{B}$ una base ortonormal.

   b) Determinar ese producto interno explícitamente en los siguientes casos:

      1) $V = \mathbb{R}^2$, $k = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{(1,1),(-1,-2)\}$;
      2) $V = \mathbb{R}^3$, $k = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$;
      3) $V = \mathbb{C}^3$, $k = \mathbb{C}$, $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$;
      4) $V = \mathbb{C}^4$, $k = \mathbb{C}$, $\mathcal{B} = \{(1,0,0,i),(0,1,0,i),(i,i,i,0),(0,2,0,0)\}$;
      5) $V = \mathbb{R}[X]_3$, $k = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{x^i\}_{i=0}^3$;
      6) $V = \mathbb{R}[X]_3$, $k = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{(x-1)^i\}_{i=0}^3$.

2. Determinar si las siguientes funciones definen productos internos sobre el espacio correspondiente, justificando su respuesta.

   a) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Phi(x,y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 3x_2y_1 + 2x_2y_2$.

   b) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $\Phi(x,y) = x_1\overline{y_1} + (i+1)x_1\overline{y_2} + (i+1)x_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2}$.

   c) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Phi(x,y) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$.

   d) $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\Phi(x,y) = xQQ^ty^t$, donde Q es una matriz inversible en $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

   e) $\Phi : \mathbb{R}[X]_2 \times \mathbb{R}[X]_2 \to \mathbb{R}$, $\Phi(f,g) = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f'(1)g'(1)$.

3. *a*) Determinar para qué valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ la forma bilineal

   $$\langle x,y\rangle = ax_1y_2 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + bx_2y_2 + (1+b)x_3y_3 + cx_1y_3$$

   resulta un producto interno en $\mathbb{R}^3$.

   b) Determinar para cuáles $\lambda \in \mathbb{R}$ se obtiene un producto interno en $\mathbb{R}^3$ definiendo

   $$\langle x,y\rangle = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3\lambda x_1y_3 + 3\lambda x_3y_1.$$

4. Determinar condiciones sobre una matriz $B \in M_n(\mathbb{R})$ de manera que $\langle x,y\rangle = x^tBy$ resulte un producto interno sobre $\mathbb{R}^n$.

5. Para cada S, hallar una base ortonormal del complemento ortogonal de S.

   a) $S = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$ en $\mathbb{R}^3$, con producto interno usual;

   b) $S = \langle(1,2,1)\rangle$ en $\mathbb{R}^3$, con el producto interno dado por

   $$\langle x,y\rangle = x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1;$$

   c) $S = \langle x^2, x^4 + x^2 + 1\rangle$ en $\mathbb{R}[X]_4$, con el producto interno dado por

   $$\langle p,q\rangle = \int_0^1 pq\,\mathrm{d}x;$$

d) $S = \langle f_1 + f_2 \rangle$ en $\langle f_1, f_2, f_3 \rangle \subset C^\infty(\mathbb{R})$, donde $f_1(x) = x$, $f_2(x) = e^x$ y $f_3(x) = x^2$, con el producto interno dado por

$$\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \tfrac{1}{2}f(1)g(1) + f(\tfrac{1}{2})g(\tfrac{1}{2});$$

6. Sea $\langle -, - \rangle : M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$, con $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr} AB^*$. Mostrar que $\langle -, - \rangle$ es un producto interno sobre $M_n(\mathbb{C})$, y determinar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales.

7. *a*) Sea $w : [-1, 1] \to \mathbb{R}^+$ una función continua y positiva. Dadas $f, g \in \mathbb{R}[X]_n$ se define

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)w(x)\,\mathrm{d}x.$$

Mostrar que $\langle -, - \rangle$ es un producto interno sobre $\mathbb{R}[X]_n$.

b) Para $n = 3$ y $w(x) \equiv 1$, aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1, X, X^2, X^3\}$.

8. Sea p la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre su subespacio $S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 - x_2 = 0\}$ con respecto al producto interno usual.

a) Caracterizar el conjunto de puntos $c \in \mathbb{R}^3$ tales que $p(c) = (1, 2, 1)$. ¿Es un subespacio?

b) Hallar una recta $L_1 \subset V$ tal que $p(L_1) = L_2$, si $L_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 = x_1 - x_3 = 0\}$.

9. Sea V un espacio vectorial con producto interno y sea p un proyector en V. Probar que

$$\operatorname{im} p \perp \ker p \iff \|p(x)\| \leq \|x\| \text{ para todo } x \in V.$$

10. Considerar en $\mathbb{R}^3$ el producto interno cuya matriz en base canónica es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y sea $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\phi((x_1, x_2, x_3)) = 2x_1 - 2x_2 - 3x_3$. Encontrar $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $\phi = \langle -, v \rangle$, es decir, tal que $\phi(x) = \langle x, v \rangle$ para todo $x \in V$.

11. Determinar f^* en cada caso.

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, -x_1 + x_3)$, para el producto interno usual;

b) $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + (1 - i)x_2, x_2 + (3 + 2i)x_3, x_1 + ix_2 + x_3)$, para el producto interno usual;

c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que si $\mathcal{B} = \{(1, 2, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$, entonces

$$[f]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

para el producto interno usual;

d) $f : \mathbb{R}[X]_3 \to \mathbb{R}[X]_3$, $f(p) = p'$, para el producto interno dado por $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} pq\mathrm{d}x$;

e) $f : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ tal que $f(A) = PAP^{-1}$, para una matriz inversible fija $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ y el producto interno $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr} AB^*$ en $M_n(\mathbb{C})$.

12. *a*) Sea $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$[f]_E = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 4 & 6 & 2 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

donde E es la base canónica. Determinar un producto interno en $\mathbb{R}^3$ para el que f resulte autoadjunta.

b) ¿Es cierto que para todo endomorfismo $f \in \operatorname{End}(V)$ de un espacio vectorial real de dimensión finita existe un producto interno $\langle -, - \rangle$ para el cual f es autoadjunta?

13. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita con un producto interno, y $S \subset V$ un subespacio. Mostrar que la proyección ortogonal de V en S es un endomorfismo autoadjunto de V. Determine sus autovalores. ¿Hay otros proyectores de V (no ortogonales) con imagen S que sean autoadjuntos?

14. a) Encontrar una matriz ortogonal P tal que PAP^t sea diagonal, si

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$;

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Encontrar una matriz unitaria U tal que UAU^* sea diagonal, si

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & i & 0 \\ 1 & 3 & 2i & 1 \\ -i & -2i & 3 & i \\ 0 & 1 & -i & 2 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 2 & -i & 0 \\ i & i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

15. Considerar en $M_n(\mathbb{C})$ el producto interno $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr} AB^*$. Si $M \in M_n(\mathbb{C})$, sea $t_M : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ dada por $t_M(A) = MA$. Mostrar que t_M es un endomorfismo unitario sii M es unitaria.

16. Hallar la matriz en la base canónica de cada una de las siguientes transformaciones lineales:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{3}$;

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, simetría respecto de la recta de ecuación $x_1 + x_2 = 0$;

c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, simetría respecto del plano de ecuación $x_1 - x_2 + x_3 = 0$;

d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{4}$ y eje $\langle (1, 0, 1) \rangle$.

17. Probar las siguientes afirmaciones.

a) Si V es un espacio vectorial real con un producto interno, entonces

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \|x + y\|^2 - \frac{1}{4} \|x - y\|^2,$$

cualesquiera sean $x, y \in V$.

b) Si V es un espacio vectorial complejo con un producto interno, entonces

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \|x + y\|^2 - \frac{1}{4} \|x - y\|^2 + \frac{i}{4} \|x + iy\|^2 + \frac{i}{4} \|x - iy\|^4,$$

cualesquiera sean $x, y \in V$.

c) Si V es un espacio vectorial, la suma de dos productos internos de V es un producto interno en V.

18. Mostrar que toda matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica posee una raíz cúbica simétrica en $\mathbb{R}^{n \times n}$.