PRÁCTICA 6

Forma normal de Jordan

1. Determinar la forma normal de Jordan y una base de Jordan para las siguientes matrices:

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

   d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

   e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   f) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión menor o igual a 6, y sea $f : V \to V$ un endomorfismo nilpotente. Encontrar las posibles formas de Jordan de f.

3. a) ¿Cuántas clases de semejanza hay de matrices de $M_4(\mathbb{C})$ que tienen polinomio característico igual a x^4?

   b) ¿Cuántas clases de semejanza hay de matrices de $M_7(\mathbb{C})$ que tienen polinomio característico igual a x^7 y polinomio minimal igual a x^3?

4. Sea $f \in \operatorname{End}(V)$ con $\dim V = 6$, de polinomio minimal x^6, y supongamos que $\{v_1, \ldots, v_6\}$ es una base de Jordan para f. Encontrar la forma de Jordan para f^2, f^3, f^4 y f^5, y bases que las realicen.

5. Hallar una base en la que se realice la forma normal de Jordan, y la forma de Jordan, de la matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, con

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq j; \\ 1 & \text{si } i > j. \end{cases}$$

6. Decidir si existen endomorfismos tales que

   a) $f \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^8)$, nilpotente, y

$$(\operatorname{rk} f, \operatorname{rk} f^2, \operatorname{rk} f^3, \operatorname{rk} f^4, \operatorname{rk} f^5) = (6, 4, 3, 1, 0);$$

   b) $f \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^{16})$, $m_f = x^5$, y

$$(\operatorname{rk} f, \operatorname{rk} f^2, \operatorname{rk} f^3, \operatorname{rk} f^4, \operatorname{rk} f^5) = (9, 5, 3, 1, 0).$$

   En caso afirmativo, escribir sus matrices en forma de Jordan.

7. Supongamos que A y B son dos matrices en $\mathbb{C}^{n \times n}$. Mostrar que si A y B son semejantes, entonces tienen el mismo polinomio característico y el mismo minimal. Encontrar dos matrices con el mismo minimal y el mismo característico que no sean semejantes.

8. Sea $J = J(\lambda, 3)$ es un bloque de Jordan de tamaño 3 con autovalor λ.

   a) Calcular J^m para todo $m \geq 0$.

   b) Calcular $f(J)$, donde f es un polinomio a coeficientes complejos.

   c) Calcular e^J y $\cos J$.

9. Sea $V \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ el subespacio $V = \langle e^x, xe^x, x^2e^x, e^{2x} \rangle$. Sea $\partial : V \to V$ la transformación lineal definida por $\partial(f) = f'$. Hallar una base de Jordan y la forma de Jordan para ∂.

10. Sea $A \in M_{15}(\mathbb{C})$ una matrix con autovalores λ_1 , λ_2 y λ_3 y que cumple, simultáneamente:

$$\text{rk}(A - \lambda_1 Id) = 13,\ \text{rk}(A - \lambda_1 Id)^2 = 11,\ \text{rk}(A - \lambda_1 Id)^3 = 10,\ \text{rk}(A - \lambda_1 Id)^4 = 10,$$

$$\text{rk}(A - \lambda_2 Id) = 13,\ \text{rk}(A - \lambda_2 Id)^2 = 11,\ \text{rk}(A - \lambda_2 Id)^3 = 10,\ \text{rk}(A - \lambda_2 Id)^4 = 9,$$

$$\text{rk}(A - \lambda_3 Id) = 13,\ \text{rk}(A - \lambda_3 Id)^2 = 12,\ \text{rk}(A - \lambda_3 Id)^3 = 11.$$

    Hallar su forma de Jordan.

11. *a*) Sea $N \in M_3(\mathbb{C})$ nilpotente, y sea $A = 1 + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2$. Mostrar que A es una raiz cuadrada de $1 + A$.

    b) Desarrollando la función $(1 + x)^{1/2}$ en su serie de Taylor, muestre que toda matriz de la forma $1 + N$ con N nilpotente admite una raiz cuadrada. ¿Es única?

    c) Muestre que un endomorfismo $f \in \text{End}(V)$ nilpotente de índice de nilpotencia igual a la dimensión de V no posee raíces cuadradas.

12. Sea $A \in M_5(\mathbb{C})$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

    a) Hallar la forma de Jordan y calcular una base de Jordan para A.

    b) Calcular A^n para cada $n \in \mathbb{N}$.

13. Sean $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$. Se define la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ de la siguiente manera:

$$a_0 = \alpha, a_1 = \beta$$

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n \ \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

    Hallar una fórmula general para el término a_n.

14. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$a_{ij} = \begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$$

    con condiciones iniciales $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.