Matemática 2 - Segundo Cuatrimestre de 2013

Práctica 2

Transformaciones lineales

1. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales, y describir su núcleo y su imagen.

   a) $\mathrm{tr} : M_n(k) \to k$;

   b) $L_A : B \in M_{k,m}(k) \mapsto AB \in M_{k,n}(k)$, para un $A \in M_{m,n}(k)$;

   c) $\frac{d}{dx} : f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mapsto f' \in C^\infty(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$;

   d) $\mathrm{ev}_a : p \in k[X] \mapsto p(a) \in k$, con $a \in k$;

   e) $t : z \in \mathbb{C} \mapsto \bar{z} \in \mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{C}$;

   f) $Im : z \in \mathbb{C} \mapsto Im(z) \in \mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{C}$;

   g) $I : f \in C_\mathbb{R}([0,1]) \mapsto \int_0^1 f(x)\,dx \in \mathbb{R}$;

   h) $L : C_\mathbb{R}([0,1]) \to C_\mathbb{R}([0,1])$ con $Lf(x) = \int_0^x f(t)\,dt$;

2. Sean $f : U \to V$ y $g : V \to W$ transformaciones lineales. Mostrar que

   a) $\ker f \subset \ker(g \circ f)$,

   b) $\ker f = \ker(g \circ f)$ si $\mathrm{im} f \cap \ker g = 0$,

   c) $\mathrm{im} g \supseteq \mathrm{im}(g \circ f)$,

   d) $\mathrm{im} g = \mathrm{im}(g \circ f)$ si $\mathrm{im} f = V$.

   Mostrar con ejemplos que las igualdades de *a*) y *c*) no valen en general.

3. Si $f : U \to V$ y $g : V \to W$ son transformaciones lineales, mostrar que

   $$\dim \ker(g \circ f) \leq \dim \ker f + \dim \ker g.$$

4. Mostrar una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(ax) = af(x)$ para cada $a \in \mathbb{R}$ y cada $x \in \mathbb{R}^2$, pero que no sea lineal.

5. Mostrar que si $f, g : V \to V$ son endomorfismos de V, entonces

   $$f(\ker(g \circ f)) = \ker g \cap \mathrm{im} f.$$

6. Sea $f : V \to W$ una tranformación lineal. Probar lo siguiente.

   a) Si $H \subset V$ es un subespacio, $\dim f(H) = \dim H - \dim H \cap \ker f$.

   b) Si $L \subset W$ es un subespacio, $\dim f^{-1}(L) = \dim L \cap \mathrm{im} f \; + \dim \ker f$.

7. Sean $f, g : V \to W$ transformaciones lineales.

   a) Mostrar que $\dim \mathrm{im}(f + g) \leq \dim \mathrm{im} f + \dim \mathrm{im} g$.

   b) Mostrar que vale la igualdad sii $\mathrm{im} f \cap \mathrm{im} g = 0$ y $\ker f + \ker g = V$.

8. Probar que existe una única transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1) = (-5,3)$ y $f(-1,1) = f(5,2)$. Para dicha f, determinar los valores de $f(5,3)$ y $f(-1,2)$.

9. Decidir si existe una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1) = (2,6)$, $f(-1,1) = f(2,1)$ y $f(2,7) = (5,3)$.

10. Determinar para cuáles $a \in \mathbb{R}$ existe una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisface $f(1,-1,1) = (2,a,-1), f(1,-1,2) = (a^2,-1,1), f(1,-1,-2) = (5,-1,-7)$.

11. En cada caso, determinar si existe transformación lineal que satisfaga las condiciones indicadas.

    a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ epimorfismo.
    b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\{(1,0,1,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\} \subseteq \mathrm{im} f$.
    c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ monomorfismo.
    d) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $f(S) = T$, donde $S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ y $T = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : 2x_1 + x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0\}$.
    e) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\mathrm{im} f = S$ y $\ker f = T$, donde $S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$ y $T = \langle(1,2,1)\rangle$.
    f) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\mathrm{im} f = S$ y $\ker f = T$, donde $S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0\}$ y $T = \langle(1,-2,1)\rangle$.

12. En cada caso, definir una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaga las condiciones indicadas.

    a) $(1,1,0) \in \ker f$ y $\dim \mathrm{im} f = 1$.
    b) $\ker f \cap \mathrm{im} f = \langle(1,1,2)\rangle$.
    c) $f \neq 0$ y $\ker f \subseteq \mathrm{im} f$.
    d) $f \neq 0$ y $f \circ f = 0$.
    e) $f \neq \mathrm{id}$ y $f \circ f = \mathrm{id}$.
    f) $\ker f \neq \{0\}, \mathrm{im} f \neq \{0\}$ y $\ker f \cap \mathrm{im} f = \{0\}$.

13. Sea $f : V \to V$ un endomorfismo de un espacio vectorial V. Mostrar que

    a) $\mathrm{im} f \subset \ker f$ sii $f^2 = 0$.
    b) $\mathrm{im} f = \ker f$ sii $f^2 = 0$ y $\dim \mathrm{im} f = \dim \ker f$.
    c) $\dim \ker f \cap \mathrm{im} f = \dim \mathrm{im} f - \dim \mathrm{im} f^2$.
    Sugerencia: Considerar la aplicación $f : \mathrm{im} f \to \mathrm{im} f^2$.
    d) $\ker f \subset \mathrm{im} f$ sii $\dim \ker f = \dim \mathrm{im} f - \dim \mathrm{im} f^2$.

14. Sean $f, g : V \to V$. Si $f \circ g = 0$, ¿es cierto que $g \circ f = 0$?

15. Dar ejemplos de pares de endomorfismos $f, g : V \to V$ de un espacio vectorial V tales que sea

    a) $fg = gf$,
    b) $fg \neq gf$.

16. Probar las siguientes afirmaciones sobre transformaciones lineales.

    a) Sean $f, g : V \to W$ y $h : W \to V$ tales que $f \circ h = \mathrm{id}_W$ y $h \circ f = \mathrm{id}_V$. Entonces h es inversible y $h^{-1} = f = g$.
    b) Si $f : U \to V$ y $g : V \to W$ son inversibles, entonces $g \circ f$ también es inversible y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
    c) Sean $f, g : V \to V$ dos endomorfismos. Entonces f y g son inversibles sii $f \circ g$ y $g \circ f$ son inversibles.
    d) Sean $f, g : V \to V$ dos endomorfismos. Si V tiene dimensión finita y $f \circ g = \mathrm{id}_V$, entonces f y g son inversibles y $f^{-1} = g$.

e) Mostrar que en el inciso previo es necesaria la hipótesis de que V tenga dimensión finita.

f) Sea $f : V \to W$ una tranformación lineal. Mostrar que f es inyectiva sii siempre que $v_1, \ldots, v_n$ son vectores linealmente independientes, los vectores $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ también son vectores linealmente independientes.

g) Sea $f : V \to V$ un endomorfismo. Entonces f es inversible sii siempre que $v_1, \ldots, v_n$ son n vectores linealmente independientes resulta que $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ también son linealmente independientes.

17. Probar que si V y W son espacios vectoriales de dimensión finita de la misma dimensión, entonces $V \cong W$.

18. Sean V y W espacios vectoriales y sea $U \subset V$ un subespacio. Sea además $f : U \to W$ una transformación lineal. Mostrar que f puede extenderse a todo V de forma que la extensión sea lineal. Es decir, mostrar que existe una tranformación lineal $\bar{f} : V \to W$ tal que $\bar{f}|_U = f$.