Análisis Numérico

Primer Parcial - Segundo Cuatrimestre 2013 - 1/10/2013

LU	Nombre y Apellido	1	2	3	Nota

Justifique todas las respuestas y escriba prolijo.

1. Se desea aproximar la solución de la ecuación
$$U_t = (xU)_x + U_{xx}, \quad x \in (0,1),\ t > 0,$$
con condiciones de borde: $U(0,t) = U(1,t) = 0$.
Para ello se utiliza una malla de paso Δx, $0 = x_0 < x_1 < ... < x_J = 1$, donde $x_j = j\Delta x$, $J = \frac{1}{\Delta x}$. Se propone el esquema:
$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{x_{j+1}u_{j+1}^n - x_{j-1}u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$
   (a) Calcule el error de truncado del esquema.
   (b) Pruebe que si $r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$, entonces:
   $$u_j^{n+1} \leq (1 + \Delta t) \max_j |u_j^n|$$
   Concluya que en tal caso el método resulta estable.
   (c) Pruebe que si se utiliza este esquema para resolver la ecuación en el intervalo de tiempo $[0, t_f]$, el método converge.

2. Para aproximar la solución de la ecuación
$$U_t + aU_x = 0, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
se propone el esquema de Lax-Friedrichs:
$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$
   (a) Estudie la condición CFL. De ser necesario, imponga condiciones sobre $r = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ para que se cumpla.
   (b) A partir del estudio del k-ésimo modo de Fourier, estime el error de amplitud del método. ¿Existen valores de r para los cuales este error sea nulo?
   (c) Estime la fase del método y calcule el error relativo de fase.

3. Para resolver numéricamente la ecuación:
$$U_{tt} = U_{xx} \qquad x \in (0,1),\ t > 0$$
se considera el método:
$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} = \frac{u_{j+1}^n - 2\frac{u_j^{n+1} + u_j^{n-1}}{2} + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$
   (a) Utilizando el método de Fourier, pruebe que el método resulta incondicionalmente estable.
   (b) Si se agregan condiciones de contorno $U(0,t) = U(1,t) = 0$, $t > 0$ y condiciones iniciales: $U(x,0) = U_0(x)$ y $U_t(x,0) = 0$. Explique cómo debería aplicarse el método en $n = 0$, tomando en cuenta la condición sobre $U_t(x,0)$.