

ANALISIS NUMERICO — Práctica 3

Segundo Cuatrimestre de 2012

Notación: Designaremos con $V = \{v : v \text{ es una función continua definida en } [0,1], \text{ con derivada } v' \text{ continua a trozos y acotada en } [0,1], \text{ y que satisface } v(0) = v(1) = 0 \}$.

Notaremos $\langle u, v \rangle = \int_0^1 uv \, dx$.

Llamaremos (D) al siguiente problema de valores de contorno para la ecuación diferencial ordinaria:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

donde f es una función continua dada.

Con (V) llamaremos al problema variacional:

Encontrar $u \in V$ tal que $\langle u', v' \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V$.

Ejercicio 1. Probar que si w es continua en $[0,1]$ y $\int_0^1 wv \, dx = 0 \quad \forall v \in V$, entonces $w(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$.

Ejercicio 2. Probar que si u satisface el problema (V), y u'' existe en el sentido habitual y es continua, u es también solución del problema (D).

Ejercicio 3. Demuestre que las siguientes formas bilineales son continuas y coercivas en los respectivos espacios V

1. $V = \mathbb{R}^n$, $a(u, v) = vAu^t$ con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A definida positiva.
2. $V = L^2(0,1)$, $a(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x)\rho(x)dx$, con $\rho(x) > 0$ y continua en $[0,1]$.
3. $V = H^1(0,1)$, $a(u, v) = \int_0^1 (u(x)v(x)\rho_1(x) + u'(x)v'(x)\rho_2(x))dx$, con $\rho_i(x) > 0$ y continuas en $[0,1]$.
4. $V = H_0^1(0,1)$, $a(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)\rho(x)dx$, $\rho(x) > 0$, continua en $[0,1]$.
5. $V = H^1(0,1)$, $a(u, v) = \int_0^1 (u'(x)v'(x)\rho_1(x) + ku'(x)v(x) + u(x)v(x)\rho_2(x))dx$ con ρ_i como en los items previos, y k constante suficientemente chico. Es esta forma bilineal simétrica?

Ejercicio 4. Considerar el problema:

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{en } I = (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

con f una función prefijada en $C(\bar{I})$.

- i) ¿Qué se considera una solución clásica del problema?
- ii) ¿Cómo definiría una solución débil?
- iii) Probar que toda solución clásica es una solución débil.
- iv) Probar que existe una solución única en $H_0^1(I)$ de la formulación débil.
- v) Probar que la solución débil es suficientemente regular (esto es, que pertenece a $C^2(\bar{I})$), y que proporciona una solución clásica.

Ejercicio 5. Realizar el análisis del ejercicio anterior para el problema no homogéneo:

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{en } I = (0, 1) \\ u(0) = \alpha, u(1) = \beta \end{cases}$$

con α y $\beta \in \mathbb{R}$, y f una función prefijada en $C(\bar{I})$.

Ejercicio 6. Realizar un análisis similar para el problema con condiciones de Neumann homogéneas:

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{en } I = (0, 1) \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

con f una función prefijada en $C(\bar{I})$.

Ejercicio 7. Considerar el problema de contorno:

$$-u'' + ku' + u = f \quad \text{en } [0,1] \quad u'(0) = u'(1) = 0$$

Hallar una formulación variacional, y probar que para k suficientemente pequeño el problema variacional tiene solución única. Hallar un valor de k tal que $a(v, v) = 0$ pero $v \neq 0$ para algún $v \in H^1$.

Ejercicio 8. Probar que el espacio vectorial V de las poligonales con vértices en $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar $(\phi, \psi) = \sum_0^n \phi(x_i)\psi(x_i)$.

Ejercicio 9. Considere una partición uniforme del intervalo $(0, 1)$, $\bigcup_1^N I_i = (0, 1)$. Construya el sistema lineal resultante, para las ecuaciones dadas en los Ejercicios 4, 6, al realizar aproximaciones de Galerkin con

$$V_h = \{\phi \in C^0(0, 1), \text{ tales que } \phi \text{ es lineal en cada } I_i\}$$

definiendo las condiciones de borde adecuadas en cada caso.

Ejercicio 10. Encontrar la solución discreta correspondiente al problema variacional:

$$\text{hallar } u \in H_0^1(I) \text{ tal que } \langle u', v' \rangle = \langle 1, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(I)$$

utilizando discretizaciones con 2, 4, 8 y 16 elementos. Usar elementos lineales, y cuadráticos. En cada caso calcular las normas $\|u - u_h\|_{L^\infty}$, $\|u - u_h\|_{L^2}$, y $\|u - u_h\|_{H^1(I)}$ (donde u es la solución clásica), y graficarlas en función de h . ¿Qué sucede cuando se usan elementos cuadráticos?

Ejercicio 11. Para el espacio

$$V_h = \{\phi \in \mathcal{C}^0(0, 1), \text{ tales que } \phi \text{ es cuadrática en cada } I_i\}$$

construya bases adecuadas y obtenga la matriz de rigidez para el problema

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 12. Sea $I = (0, 1)$ y sean x_i tales que $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = 1$ una partición de I .

1. Definimos para cada $1 \leq i \leq N - 1$,
$$G_i(x) = \begin{cases} (1 - x_i)x & 0 \leq x \leq x_i \\ x_i(1 - x) & x_i \leq x \leq 1 \end{cases}$$

verifique que $G_i \in H_0^1(0, 1)$ y que $\forall w \in H_0^1(0, 1)$ se tiene que

$$\int_0^1 w'(s)G_i'(s)ds = w(x_i)$$

2. Dada $f \in L^2(0, 1)$ considere el problema

$$\begin{cases} -u'' = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

escríbalo en forma variacional sobre H_0^1 y escriba la formulación aproximada de Galerkin utilizando el espacio

$$V_h = \{u \in H_0^1 \text{ tal que } u \in P_1(I_i) \text{ para todo } 0 \leq i \leq N - 1\}$$

a) Demuestre que ambos problemas variacionales tienen solución única.

b) Demuestre que $\int_0^1 (u - u_h)'v_h' = 0$ para todo $v_h \in V_h$. De aquí y del ítem previo concluya que $u(x_i) = u_h(x_i)$, i.e, la solución obtenida numéricamente interpola a u en los nodos (aquí u_h denota la solución del problema discreto). Verificar que efectivamene, en el ejercicio 10 sucede eso.

3. Hallar la matriz de rigidez (usando las bases de Lagrange).

Ejercicio 13. Considere el problema de contorno:

$$\begin{cases} u''''(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

Aquí u representa, por ejemplo, la deflexión de una barra empotrada en sus extremos y sujeta a una fuerza transversal de intensidad f .

Llevar el problema a la forma débil:

Hallar $u \in H_0^2(0, 1)$ tal que

$$\langle u'', v'' \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_0^2(0, 1)$$

demuestre que este problema variacional tiene solución única.

Ejercicio 14. Defina

$$V_h = \{\phi \in \mathcal{C}^0([0, 1]), \text{ tales que } \phi \text{ es cúbica en cada } I_i\}$$

y pruebe que en general V_h no está incluido en H^2 . Piense cómo definir un subespacio $W_h \subset V_h$ tal que $W_h \subset H_0^2$. Construya las bases para W_h .