ANÁLISIS NUMÉRICO

Práctica 0

Segundo Cuatrimestre de 2013

Discretización de derivadas

Ejercicio 1 Hallar el error local y el orden de las siguientes discretizaciones de la derivada primera indicando en cada caso las hipótesis de suavidad que requiere de la función u:

i. $u'(x) \sim \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$ (forward difference)

ii. $u'(x) \sim \frac{u(x)-u(x-h)}{h}$ (backward difference)

iii. $u'(x) \sim \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}$ (diferencias centradas)

iv. $u'(x) \sim -\frac{1}{h}(\frac{3}{2}u(x) - 2u(x+h) + \frac{1}{2}u(x+2h))$

Ejercicio 2 Halle el error local para la discretización habitual de la derivada segunda, y explicite sus requerimientos de suavidad:

$$f''(x) \sim \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Ejercicio 3 Halle una fórmula de aproximación para la derivada segunda que utilice los valores de f en $x, x+h$ y $x+2h$. ¿Cuál es el error local?

Para hacer en Matlab:

Ejercicio 4 Se tiene el problema de valores iniciales:

$$my'' + ay' + ky = f \qquad y(0) = y_0 \quad y'(0) = v_0,$$

que modela la posición de una masa m ubicada en el extremo de un resorte de constante k y que es sometida a una fuerza f. a es la constante de rozamiento. Las condiciones iniciales son la posición y_0 y la velocidad inicial v_0. Haga programas de Matlab que resuelvan este problema:

a) Usando la discretización habitual para la derivada segunda y diferencias centradas para la aproximación de la primer derivada.

b) Usando la discretización de la derivada segunda del ejercicio anterior y la discretización de la derivada primera dada en el ejercicio 1 iv).

Experimente con distintos valores de m, a, k y f. Por ejemplo, considere $f = f_0 \cos(t)$, $f = f_0 \sin(t)$, $f = f_0 \delta_{x=x_0}$. Para $f = 0$ resuelva analíticamente, grafique la solución numérica, la real y el error.

Ejercicio 5 Si $\varepsilon > 0$, considere el problema

$$-\varepsilon u'' - u' = 0 \qquad u(0) = 0 \quad u(1) = 1.$$

a) Discretice la ecuación usando diferencias centradas para las derivadas primera y segunda, y obtenga explícitamente la solución discreta (en función de h y ε).

b) Para distintos valores de ϵ y h, compare las gráficas de las soluciones discreta y exacta. ¿Qué ocurre si $h >> 2\epsilon$?

Ejercicio 6 Repita el ejercicio 5, pero ahora discretice usando diferencias centradas para la derivada segunda y diferencias forward para la derivada primera. Compare los resultados con los obtenidos anteriormente.

Ecuaciones de recurrencia:

Ejercicio 7 Halle la solución general de las siguientes ecuaciones de recurrencia:

$$y(i+2) - y(i+1) - 2y(i) = 0$$

$$y(i+3) - 6y(i+2) + 12y(i+1) - 8y(i) = 0$$

$$y(n+2) - 2y(n+1) + 2y(n) = 0$$

Normas de matrices y radio espectral:

Ejercicio 8 Pruebe que para toda $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

a)

$$||A||_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

b)

$$||A||_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Ejercicio 9 Pruebe que el radio espectral de una matriz cuadrada A no puede ser mayor que la mayor de las sumas de los módulos de los elementos de una fila o columna.

Ejercicio 10 Teorema de Gerschgorin Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Pruebe que:

$$|\lambda - a_{i,i}| \le R_i \qquad \text{para algún } i$$

siendo:

$$R_i = \sum_{j\ne i} |a_{ij}|$$

Ejercicio 11 El objetivo de este ejercicio es probar que el radio espectral de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ acota inferiormente a toda norma de A, sin utilizar normas complejas.

Dada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sea $\lambda = a + ib$ un autovalor de A y sea $u + iv$ el autovector correspondiente, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $u, v \in \mathbb{R}^n$.

a) Calcule Au y Av y pruebe que

$$\|Au\|_2^2 + \|Av\|_2^2 = (a^2 + b^2)(\|u\|_2^2 + \|v\|_2^2)$$

b) Concluya que

$$|\lambda| \leq \|A\|_2$$

c) Pruebe que dada una norma cualquiera $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^{n\times n}$ vale que

$$|\lambda| \leq \|A\|$$

(**Sug.:** Use que dadas dos normas $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$, existe una constante C que depende sólo de n y de las normas, tal que $\|B\|_a \leq C\|B\|_b$ para toda $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$).

Muestre una matriz A y una norma $||.||$ para la cual $\rho(A) \leq 1$ y sin embargo $||A|| > 1$.

Ejercicio 12 a) Sea A, tal que sus autovectores forman una base. Muestre una norma $|||.|||$ subordinada a una norma vectorial tal que $\rho(A) = |||A|||$.

b) Observe que en el item anterior no es necesario que exista una base de autovalores de A, sino sólo que los bloques de Jordan asociados a autovalores λ tales que $|\lambda| = \rho(A)$ sean todos de 1×1.

Ejercicio 13 (*) Demuestre que los autovalores de la matriz tridiagonal $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ de

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & & \cdots & & 0 \\ c & a & b & 0 & \cdots & & \\ 0 & c & a & b & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & c & a & b \\ 0 & & \cdots & & 0 & c & a \end{pmatrix}$$

son $\lambda_s = a + 2b\sqrt{\frac{c}{b}}\cos(\frac{s\pi}{N+1})$, $s = 1, \ldots, n$.
Sug.: Halle la ecuación de recurrencia que satisfacen los autovectores.