Análisis Numérico - TP 2 - Tema 1: **Ecuación de Poisson**

Segundo Cuatrimestre de 2013

1. El problema:

Considerar el problema de Poisson:
Dada $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, se quiere hallar $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$-\Delta u = f(x,y) \qquad (x,y) \in \Omega \tag{1.1}$$

Físicamente f representa la densidad de carga eléctrica, mientras que la incógnita u es el potencial eléctrico. Nos interesa calcular tanto u como el campo eléctrico generado por la distribución de cargas f, que viene dado por $E : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$E = -\nabla u$$

El objetivo de este trabajo es implementar un algoritmo de elementos finitos para resolver este problema. Habrá tres sub-temas, según el dominio que se considere:

(a) $\Omega = [-1,1] \times [-1,1]$

(b) $\Omega = [-2,2] \times [-1,1]$

(c) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\}$

Para generar las mallas, recomendamos utilizar el mallador distmesh.

2. Datos

Dirichlet homogéneas: Resolver (1.1) con condiciones

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0$$

Estudiar los casos:

(1) *Fuente puntual:*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y = 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

(2) *Dipolo:*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y = \frac{1}{4} \\ -1 & \text{si } x = y = -\frac{1}{4} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

(3) *Espira cargada:*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0{,}24 \le x^2 + y^2 \le 0{,}25 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Dirichlet-Neumann: Resolver (1.1) con condiciones de contorno:

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}\bigg|_{\partial\Omega\setminus\Gamma} = 0$$

Siendo Γ una parte del borde. Para los temas con dominios cuadriláteros Γ puede estar formado por dos lados. Para el dominio circular, tomar $\Gamma = \{(x,y) \in \partial\Omega : \ \ y > 0\}$. Estudiar las fuentes del caso Dirichlet.

Pila (simplificada): Esquemáticamente, una pila está formada por dos placas paralelas de material conductor, encerradas en una cápsula blindada. Al aplicar una diferencia de potencial entre las placas se genera un campo eléctrico que induce una corriente de una capa hacia la otra. Para simular esta situación, podemos imponer las siguientes condiciones de borde:

$$u\big|_{\Gamma_1} = -1$$

$$u\big|_{\Gamma_2} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}\bigg|_{\partial\Omega\setminus(\Gamma_1\cup\Gamma_2)} = 0$$

Para los dominios cuadriláteros, tomar Γ_1 y Γ_2 dos lados opuestos. Para el círculo, Γ_1 la semicircunferecia superior y Γ_2 la inferior (de modo que $\partial\Omega \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = \emptyset$).

La condición de Neumann simula el blindaje de la pila, mientras que los valores de u en los bordes Γ_1 y Γ_2 dan la diferencia de potencial. ¿Qué sucede si los valores de potencial -1 y 1 se reemplazan por 1 y 3?

3. Cálculo de ∇u

En todos los casos se desea calcular el campo $E = -\nabla u$. Para ello se puede seguir la siguiente guía: Tomar $P \in \mathbb{R}^{N\times 2}$ la matriz de nodos y $T \in \mathbb{N}^{NT\times 3}$ la de triángulos. Para cada nodo i:

- Hallar el primer triángulo t (fila de T) que contiene a i.
- Llamar $a_1 = i$ y a_2 y a_3 los otros nodos que participan en t.
- Observar que son conocidos los valores de u en los nodos: $u(a_1)$, $u(a_2)$, $u(a_3)$.
- Considerar $r_1 = a_2 - a_1$ y $r_2 = a_3 - a_2$, los vectores correspondientes a los lados de t adyacentes a i.
- Observar que las derivadas direccionales satisfacen la siguiente propiedad:

$$\frac{\partial u}{\partial r_1}(a_1) = \nabla u \cdot \frac{r_1}{\|r_1\|} \qquad \frac{\partial u}{\partial r_2}(a_1) = \nabla u \cdot \frac{r_2}{\|r_2\|}$$

y que a su vez pueden estimarse a través de los cocientes incrementales:

$$\frac{\partial u}{\partial r_1}(a_1) \sim \frac{u(a_2) - u(a_1)}{\|r_1\|} \qquad \frac{\partial u}{\partial r_2}(a_1) \sim \frac{u(a_3) - u(a_1)}{\|r_2\|}$$

- Teniendo en cuenta el item anterior se tiene que si:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{r_1}{\|r_1\|} \\ \frac{r_2}{\|r_2\|} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} \frac{u(a_2)-u(a_1)}{\|r_1\|} \\ \frac{u(a_3)-u(a_1)}{\|r_2\|} \end{pmatrix}$$

  entonces:

$$A \cdot \nabla u = b$$

  $\nabla u(a_1)$ puede calcularse construyendo la matriz A y el vector b y tomando `grad=A\b`

Es conveniente guardar los vectores `grad` de cada nodo i como las filas de una matriz $G \in \mathbb{R}^{N\times 2}$. De este modo G tiene el mismo tamaño que P, y cada fila de G contiene el gradiente de u en el nodo dado por la correspondiente fila de P.

Graficar $E = -\nabla u$ utilizando el comando `quiver`.