Apellido y Nombre:
No. de libreta:
Carrera:

Análisis Numérico

Primer Parcial - Segundo Cuatrimestre 2012 - 9/10/2012

---

1. Se desea aproximar la solución de la ecuación

$$U_t = U_{xx}, \quad x \in (0,1),\ t > 0,$$

con condiciones de borde:

$$U(0,t) = U(1,t) = 0.$$

Para ello se utiliza una malla *no* uniforme:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} = 1$$

donde $x_{j+1} - x_j = h_{j+1}$ siendo

$$h_j = \begin{cases} h & \text{si } j \text{ es impar} \\ \frac{h}{2} & \text{si } j \text{ es par} \end{cases}$$

Y el esquema:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{2}{h_j + h_{j+1}} \left[\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h_{j+1}} - \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h_j} \right]$$

(a) Estudiar el error de truncado en términos de h. Decidir si el método es consistente y con qué orden.

(b) Dar condiciones sobre h y Δt para que el método resulte convergente en $\| \cdot \|_\infty$. Dar una cota del error en términos del error de truncado.

2. Para aproximar la solución de la ecuación

$$U_t + U_x = 0$$

se propone el esquema

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \theta \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} + (1-\theta) \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0, \qquad 0 \le \theta \le 1$$

(a) Estudiar el k–ésimo modo de Fourier. Dar un valor de θ que garantice que el error de amortiguamiento del esquema sea nulo.

(b) Para el valor de θ obtenido en el punto anterior estudiar el error relativo de fase.

(c) ¿Cómo debe realizarse el despeje para que se cumpla la condición CFL? ¿Qué condiciones de borde deben imponerse?

3. Para resolver numéricamente la ecuación:

$$U_{tt} = U_{xx} \qquad x \in (0,1),\ t > 0$$

se considera el método:

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} = \theta \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + (1-\theta) \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

con $0 \leq \theta \leq 1$.

(a) Utilizando el método de Fourier, hallar condiciones sobre θ y $r = \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}$ para que el método resulte estable.

(b) Si se agregan condiciones de contorno $U(0,t) = U(1,t) = 0$, $t > 0$ y condiciones iniciales:

$$U(x,0) = U_0(x), \quad U_t(x,0) = 0.$$

Explicar cómo debería aplicarse el método en $n = 0$, tomando en cuenta la condición sobre $U_t(x,0)$.