Apellido y Nombre:
No. de libreta:
Carrera:

Análisis Numérico

Segundo Parcial - Segundo Cuatrimestre 2012 - 29/11/2012

---

1. Considere el problema:

$$\begin{cases} -(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) = f(x) \text{ en } I = (0,1) \\ u(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

con $a \in C^1(\bar{I})$ y $b, f \in C(\bar{I})$.

(a) Plantee la formulación débil del problema, en un espacio adecuado V.

(b) Demuestre que para toda $u \in V$ se tiene que:

$$\|u\|_{L^2(I)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|u'\|_{L^2(I)}$$

(c) Sea $\alpha = \min_{x\in[0,1]} a(x)$. Pruebe que si $\alpha > 0$ y $\|b\|_\infty < \frac{\alpha}{2}$ entonces existe una única solución del problema débil.

(d) Pruebe que si la solución débil u es C^2 entonces es también solución del problema continuo.

2. Sea $\mathcal{P}_k$ el conjunto de polinomios de grado menor o igual que k en una variable. Definimos $\mathcal{Q}_k = \{f(x,y) = p(x)q(y) : \ p, q \in \mathcal{P}_k\}$

(a) ¿Qué dimensión tiene $\mathcal{Q}_k$?

(b) Dado un rectángulo R pruebe que toda función en $\mathcal{Q}_1$ queda unívocamente determinada por su valor en las esquinas de R.

(c) Pruebe que la cuadratura:

$$\int_a^b f(x)dx \sim (b-a)\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

es exacta para $f \in \mathcal{P}_2(a,b)$, donde

$$x_1 = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

d) Dado un rectángulo $R = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$, pruebe que la cuadratura

$$\int_R f \sim \frac{|R|}{4}\Big(f(x_1,y_1) + f(x_1,y_2) + f(x_2,y_1) + f(x_2,y_2)\Big)$$

es exacta para $f \in \mathcal{Q}_2$, donde x_1 y x_2 son los del ítem anterior y:

$$y_1 = \frac{c+d}{2} - \frac{d-c}{2\sqrt{3}} \quad \text{y} \quad y_2 = \frac{c+d}{2} + \frac{d-c}{2\sqrt{3}}$$

3. Considere el problema:

$$(P)\begin{cases} -\Delta u(x,y)+u=f(x,y) & (x,y)\in\Omega=[-1,1]\times[0,1] \\ u(x,y)=0 & \text{si } (x,y)\in\Gamma=\{(x,0):\ -1\leq x\leq 1\} \\ \frac{\partial u}{\partial\eta}(x,y)=0 & \text{si } (x,y)\in\partial\Omega\setminus\Gamma \end{cases}$$

(a) Plantee el problema débil asociado.

(b) Pruebe existencia y unicidad de solución débil.

(c) Considere la partición $\Omega=R_1\cup R_2$, donde $R_1=[-1,0]\times[0,1]$ y $R_2=[0,1]^2$. Sea $S=\{f\in C(\Omega):\quad f|_{R_i}\in\mathcal{Q}_1,\ i=1,2\}$. Teniendo en cuenta los datos de borde, encuentre un subespacio V de S apropiado para resolver (P) por elementos finitos. Halle una base de V.

(d) Calcule la matriz de rigidez del problema.