# Topología

Segundo cuatrimestre - 2012

Práctica 9

**Homología**

---

1. Hallar todos los grupos abelianos posibles $M$ en la siguiente sucesión exacta:
$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to M \to \mathbb{Z}_4 \to 0$$

2. Probar que una sucesión exacta corta de complejos de cadenas
$$0 \to A_* \xrightarrow{f} B_* \xrightarrow{g} C_* \to 0$$
induce una sucesión exacta larga de homología
$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{f_n} H_n(B) \xrightarrow{g_n} H_n(C) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{f_{n-1}} H_{n-1}(B) \xrightarrow{g_{n-1}} \dots$$

3. Sean $(C_*, d)$ y $(D_*, d')$ complejos. Probar que $(C_* \oplus D_*, d \oplus d')$ es un complejo y que
$$H_*(C \oplus D) = H_*(C) \oplus H_*(D).$$

4. Sea $m \in \mathbb{N}$. Calcular la homología del siguiente complejo de cadenas:
$$\dots \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \dots \qquad d_{2n}(x) = 0 \quad d_{2n+1}(x) = mx$$

5. Probar que si $A$ es un retracto de un espacio $X$, entonces $i_* : H_n(A) \to H_n(X)$ es un monomorfismo para todo $n \geqslant 0$.

6. Sea $A \subset X$. Probar que $H_0(X, A) = 0$ si y sólo si $A$ interseca todas las componentes arco conexas de $X$.

7. Probar que si $A$ es un retracto por deformación débil de un espacio $X$ entonces $H_n(X, A) = 0$ para todo $n \geqslant 0$.

8. Probar que si $(X, A, B)$ es una terna con $B \subseteq A \subseteq X$, entonces existe una sucesión exacta larga
$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A, B) \xrightarrow{i_*} H_n(X, B) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A, B) \xrightarrow{i_*} \dots$$

9. Probar que $H_1(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$ es un grupo abeliano libre y calcular una base.

10. 
    *a*) Sea $\{X_i\}$ una familia finita de espacios topológicos y sea $x_i \in X_i$ tal que $(X_i, x_i)$ es un par bueno. Si $X = \bigvee_i X_i$ es la unión de los espacios, identificando todos los puntos bases $x_i$, probar que $\tilde{H}_n(X) = \oplus_i \tilde{H}_n(X_i)$.

    *b*) Calcular $\tilde{H}_n(\bigvee\limits_{i \in I} S^k)$.