Topología

Segundo cuatrimestre - 2012
Práctica 5
Espacios de funciones

Para Y espacio métrico (topología de convergencia compacta)

1. Sean X un espacio topológico e (Y,d) un espacio métrico.
   (a) Probar que en Y^X se tienen las siguientes inclusiones de topologías:
   $$(\text{uniforme}) \supset (\text{convergencia compacta}) \supset (\text{convergencia puntual})$$
   (b) Probar que si X es compacto, entonces las dos primeras coinciden.
   (c) Probar que si X es discreto, entonces las dos últimas coinciden.

2. Decidir con cuáles de las topologías del ejercicio anterior la sucesión $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = 1/nx$, tiene límite.

3. Probar que el conjunto de las funciones acotadas $\mathcal{B} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f \text{ acotada}\}$ no es cerrado en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ con la topología de convergencia compacta pero sí con la topología uniforme.

4. Considere la sucesión de funciones $f_n : (-1,1) \to \mathbb{R}$ definida por
   $$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^k.$$
   (a) Probar que f_n converge con la topología de convergencia compacta. Concluir que la función límite es continua.
   (b) Probar que f_n no converge con la topología uniforme.

5. Sea (Y,d) un espacio métrico, y sea X un espacio topológico. Dada $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ y dada una función continua positiva $\delta : X \to \mathbb{R}_+$, sea
   $$B(f,\delta) = \{g \mid d(f(x),g(x)) < \delta(x) \text{ para todo } x \in X\}$$
   (a) Probar que los conjuntos $B(f,\delta)$ forman una base para una topología en $\mathcal{C}(X,Y)$, a la que llamaremos *topología fina*.
   (b) Probar que la topología fina es más fina que la uniforme.
   (c) Probar que si X es compacto, entonces las topologías fina y uniforme coinciden.
   (d) Probar que si X es discreto, entonces $\mathcal{C}(X,Y) = Y^X$ y las topologías fina y caja coinciden.

Para Y espacio topológico (topología compacto-abierta)

6. Probar que si Y es Hausdorff (resp. regular), entonces $\mathcal{C}(X,Y)$ es Hausdorff (resp. regular) con la topología compacto-abierta.
   Sug: si $\overline{U} \subseteq V$, entonces $\overline{W(C,U)} \subseteq W(C,V)$.

7. Sea A un subespacio de X. Probar que la restricción $r : \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{C}(A,Y)$ es continua si se considera ambos espacios con la topología compacto-abierta.

8. Sea Y localmente compacto y Hausdorff. Probar que la composición

$$\circ : \mathcal{C}(X,Y) \times \mathcal{C}(Y,Z) \to \mathcal{C}(X,Z)$$

es continua con la topología compacto-abierta.
Sug: Si $g \circ f \in W(C,U)$, encontrar V tal que $f(C) \subseteq V$ y $g(\overline{V}) \subseteq U$.

9. Probar que si $p : E \to B$ es cociente y X es localmente compacto y Hausdorff, entonces $p \times id : E \times X \to B \times X$ es cociente.