Topología

Segundo cuatrimestre - 2012

Práctica 4

Compacidad y axiomas de separación

Compacidad

1. Sean $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ dos topologías en X.
   (a) Probar que si $\mathcal{T}'$ es más fina que $\mathcal{T}$ y X es compacto para $\mathcal{T}'$, entonces X también es compacto para $\mathcal{T}$.
   (b) Probar que si X es compacto y Hausdorff tanto para $\mathcal{T}$ como para $\mathcal{T}'$, entonces ambas topologías coinciden o no son comparables.

2. Probar que si X tiene la topología del complemento finito, entonces es compacto.

3. Decidir si $[0,1]$ es compacto para
   (a) la topología $\{U : [0,1] \setminus U$ es numerable o igual a $[0,1]\}$.
   (b) la topología de subespacio de $\mathbb{R}_l$.

4. Sea X Hausdorff y sean $A, B \subset X$ compactos y disjuntos. Probar que existen abiertos disjuntos U, V tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.

5. Mostrar que si $f : X \to Y$ es continua, donde X es compacto e Y es Hausdorff, entonces f es cerrada.

6. Sea $f : X \to Y$, con Y compacto y Hausdorff. Probar que f es continua si y sólo si el gráfico de f definido por $G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ es cerrado en $X \times Y$.

7. Sea $p : X \to Y$ suryectiva y cerrada. Probar que si Y es compacto y además $p^{-1}(y)$ es compacto para todo $y \in Y$, entonces X es compacto.

8. Sea X metrizable. Probar que son equivalentes:
   (a) X es acotado para toda métrica que induzca la topología de X.
   (b) Toda función continua $\phi : X \to \mathbb{R}$ es acotada.
   (c) X es compacto.

9. Considere el siguiente producto fibrado.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{pb}"] & X \arrow[d] \\ Z \arrow[r] & Y \end{tikzcd} \qquad P = X \times_Y Z$$

   Probar que si X y Z son compactos, e Y Hausdorff, entonces P es compacto.
   Hallar un ejemplo en el que Y no sea Hausdorff y P no sea compacto.

10. Sea $f : X \to Y$ suryectiva y propia. Probar que si X es Hausdorff, entonces Y también lo es.

Compacidad local

11. Probar que $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto.

12. Probar que $[0,1]^\omega$ no es localmente compacto con la topología uniforme.

13. Probar que si $\prod_{i\in I} X_i$ es localmente compacto, entonces cada X_i es localmente compacto y todos los X_i, salvo una cantidad finita, son compactos.

14. Probar que si X es localmente compacto y $f : X \to Y$ es abierta, entonces $f(X)$ también es localmente compacto. Hallar un ejemplo que muestre que la hipótesis f abierta es necesaria.

Compactificación de Alexandroff

15. Probar que la compactificación a un punto de $\mathbb{N}$ es homeomorfa a $\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ con la topología subespacio de $\mathbb{R}$.

16. Usando la proyección estereográfica $p : S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$p(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n)$$

probar que la compactificación a un punto de $\mathbb{R}^n$ es homeomorafa a S^n.

17. Probar que si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo de espacios de Hausdorff localmente compactos, entonces f se extiende a un homeomorfismo entre sus compactificaciones a un punto.

Axiomas de separación

18. Probar que si X es regular, entonces dos puntos distintos cualesquiera de X admiten entornos cuyas clausuras son disjuntas.

19. Probar que si X es normal, entonces todo par de cerrados disjuntos de X admiten entornos cuyas clausuras son disjuntas.

20. Probar que un subespacio cerrado de un espacio normal es normal.

21. Probar que si X tiene la topología del orden, entonces X es regular.

22. Sea $\{X_\alpha\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Probar que si $\prod X_\alpha$ es Hausdorff ó regular ó normal, entonces también lo es cada X_α.

23. Sea X un conjunto y sean $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ topologías en X tales que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. Suponiendo que X es Hausdorff (o regular o normal) con una de estas topologías, decidir qué puede deducirse de X con la otra topología.

24. Sean $f, g : X \to Y$ continuas, Y Hausdorff. Probar que $\{x : f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X.

25. Probar que si X es normal y conexo entonces tiene un solo punto o es no numerable.

26. Sea Z un espacio topológico. Si Y es un subespacio de Z, decimos que Y es retracto de Z si existe una función continua $r : Z \to Y$ tal que $r(y) = y$ para todo $y \in Y$.

    (a) Probar que si Z es Hausdorff e Y es un retracto de Z, entonces Y es cerrado en Z.
    (b) Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ con dos elementos. Probar que A no es un retracto de $\mathbb{R}^2$.
    (c) Probar que S^1 es un retracto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

27. Probar que si Y es normal con base $\mathcal{B}$, entonces Y es subespacio de $[0,1]^J$ con $J \subset \mathcal{B} \times \mathcal{B}$.

28. Probar que si $\{f_\alpha : X \to \mathbb{R}\}$ es una familia de funciones continuas que separan puntos de cerrados, entonces es inicial.

29. Probar que $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ no es normal, pero es completamente regular.

30. Sea X completamente regular. Sean A, B cerrados disjuntos de X. Probar que si A es compacto, entonces existe una función continua $f : X \to I$ tal que $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$.

31. Probar que si X es localmente compacto y Hausdorff, entonces es completamente regular.

Compactificación de Stone-Čech

32. Sea Y una compactificación arbitraria de X, y sea $\beta(X)$ la compactificación de Stone-Čech. Probar que existe una función cerrada y suryectiva $g : \beta(X) \to Y$ que se restringe a la identidad de X.

33. (a) Probar que si $f : S_\Omega \to \mathbb{R}$ es continua, entonces es eventualmente constante.
    (b) Probar que la compactificación en un punto de S_Ω y la compactificación de Stone-Čech son equivalentes.
    (c) Concluir que toda compactificación de S_Ω es equivalente a la compactificación en un punto.

34. Sea X completamente regular. Probar que X es conexo si y sólo si $\beta(X)$ es conexo.

35. Sea X discreto.
    (a) Probar que si $A \subset X \subset \beta(X)$, entonces $\overline{A}$ y $\overline{X \setminus A}$ son disjuntos, donde las clausuras se toman en $\beta(X)$.
    (b) Probar que si U es abierto en $\beta(X)$, entonces $\overline{U}$ es abierto en $\beta(X)$.
    (c) Probar que $\beta(X)$ es totalmente disconexa.

Grupos topológicos

36. Probar que $(\mathbb{R}, +)$, $(S^1, \cdot)$ y $(GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$ son grupos topológicos.

37. Probar que G es un grupo topológico si y sólo si la función $H : G \times G \to G$, $H(g, h) = g \cdot h^{-1}$ es continua.

38. Probar que para cada $a \in G$, las funciones $L_a : G \to G$ y $R_a : G \to G$, definidas por $L_a(g) = a \cdot g$, $R_a(g) = g \cdot a$ son homeomorfismos.

39. Sea G un grupo topológico, sea e el neutro de G y sea U abierto que contiene a e. Probar que existe V abierto que contiene a e tal que $V \cdot V \subset U$ y $V^{-1} \subset U$.

40. Probar que si un grupo topológico G es T_0, entonces es T_2.

41. Probar que si H es un subgrupo de un grupo topológico G, entonces la clausura de H es también un subgrupo. Probar que si H es invariante, entonces su clausura también.

42. De los grupos topológicos $GL(n, \mathbb{R}), SL(n, \mathbb{R}), O(n, \mathbb{R}), SO(n, \mathbb{R})$, decidir cuáles son compactos y cúales son conexos.