

Topología

Segundo cuatrimestre - 2012

Práctica 2

Funciones continuas, Subespacios, Productos y Cocientes

Funciones continuas

1. Sean X, Y espacios topológicos. Probar que cada una de las siguientes condiciones sobre $f : X \rightarrow Y$ es equivalente a pedir que f sea continua

- (a) Para todo $x \in X$ y para todo $A \in \mathcal{F}_y$ ($y = f(x)$) existe $B \in \mathcal{F}_x$ tal que $f(B) \subset A$
- (b) Para toda red $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subset X$ tal que $x_\alpha \rightarrow x$ se tiene que $f(x_\alpha) \rightarrow f(x)$
- (c) Para todo $A \subset X$ se tiene $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
- (d) Si \mathcal{B} es una base para la topología de Y , entonces $f^{-1}(B)$ es abierto en X para todo $B \in \mathcal{B}$.
- (e) Si \mathcal{S} es una sub-base para la topología de Y , $f^{-1}(S)$ es abierto en X para todo $S \in \mathcal{S}$.

2. Sean X un espacio topológico y $E \subset X$. Sea $\chi_E : X \rightarrow \mathbb{R}$ la función característica de E , esto es,

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$

Probar que χ_E es continua en x si y sólo si x no pertenece a la frontera de E .

3. (a) Sean X, Y conjuntos ordenados, con la topología del orden. Probar que si $f : X \rightarrow Y$ es biyectiva y preserva el orden, entonces f es un homeomorfismo.
- (b) Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$. Probar que g es un homeomorfismo.
- (c) Sea $X = (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$ con la topología euclídea. Definimos $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Probar que f es biyectiva y preserva el orden. ¿Es f un homeomorfismo?

4. Sea Y un conjunto ordenado con la topología del orden. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ funciones continuas.

- (a) Probar que el conjunto $\{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ es cerrado en X .
- (b) Sea $h : X \rightarrow Y$ la función $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$. Probar que h es continua.

5. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una colección de subconjuntos del espacio X tal que $X = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$. Sea $f : X \rightarrow Y$ y supongamos que $f|_{A_\alpha}$ es continua para cada $\alpha \in \mathcal{A}$.

- (a) Probar que si cada A_α es abierto, entonces f es continua.
- (b) Probar que si \mathcal{A} es finito y cada conjunto A_α es cerrado, entonces f es continua.
- (c) Encontrar un ejemplo donde la colección $\mathcal{A} = \mathbb{N}$, cada A_α es cerrado, pero f no es continua.
- (d) Una familia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ se dice localmente finita si para cada $x \in X$ existe un abierto $U \subset X$, $x \in U$, tal que $U \cap A_\alpha \neq \emptyset$ sólo para finitos valores de α . Mostrar que si la familia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ es localmente finita y cada A_α es cerrado, entonces f es continua.

Subespacios, productos y cocientes

6. Consideremos a $I = [-1, 1]$ como subespacio de \mathbb{R} . ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son abiertos en I ? ¿Cuáles son abiertos en \mathbb{R} ?

$$\begin{aligned} A &= \{x : \frac{1}{2} < |x| < 1\} & B &= \{x : \frac{1}{2} < |x| \leq 1\} & C &= \{x : \frac{1}{2} \leq |x| < 1\} \\ D &= \{x : \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1\} & E &= \{x : 0 < |x| < 1, 1/x \notin \mathbb{N}\} & F &= \{x : |x| \leq 1\} \end{aligned}$$

7. Sea X un conjunto ordenado, equipado con la topología del orden, y sea $Y \subset X$.
- Probar que la topología del orden en Y no coincide en general con la topología de subespacio. Comparar estas dos topologías.
 - Y se dice **convexo** si satisface $a, b \in Y \Rightarrow (a, b) \subset Y$. Probar que si Y es convexo, entonces estas dos topologías sí coinciden.
8. Probar que si $Z \subset A$ y A es subespacio de X , entonces la topología de Z como subespacio de A coincide con la topología de Z como subespacio de X .
9. Sean A un subespacio de X y B un subespacio de Y . Probar que la topología producto en $A \times B$ coincide con la topología de subespacio de $X \times Y$.
10. Sean X, Y espacios topológicos. Probar que las proyecciones $p_1 : X \times Y \rightarrow X$ y $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$ son abiertas. Hallar ejemplos en los que no sean cerradas.
11. Sean X, Y, Z espacios topológicos, y sea $f : X \times Y \rightarrow Z$ una función. f se dice **continua en x** si $f(-, y) : X \rightarrow Z$ es continua para todo $y \in Y$. Análogamente, f se dice **continua en y** si $f(x, -) : Y \rightarrow Z$ es continua para todo $x \in X$.
- Probar que si f es continua, entonces es continua en cada variable.
 - Hallar un ejemplo en el que f sea continua en cada variable y sin embargo no sea continua.
12. (a) Probar que la topología del orden del diccionario en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ coincide con la topología producto de $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$, donde \mathbb{R}_d es la topología discreta en \mathbb{R} . Comparar con la topología usual de \mathbb{R}^2 .
- (b) Sea $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Comparar la topología producto en $I \times I$ con la topología del orden del diccionario en $I \times I$ y con la topología $I_d \times I$ donde I_d denota a I con la topología discreta.
13. Sea \mathbb{R}_l la topología cuya base de abiertos son los conjuntos de la forma $[a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Sea L una recta en el plano. Describir la topología que hereda L como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}$ y como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$.
14. Sean $A \subset X$ y $B \subset Y$. Probar que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. Concluir que si A es cerrado en X y B es cerrado en Y , entonces $A \times B$ es cerrado en $X \times Y$.
15. (a) Sean $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. Probar que las funciones $f : X \rightarrow X \times Y$ y $g : Y \rightarrow X \times Y$ definidas por $f(x) = (x, y_0)$, $g(y) = (x_0, y)$ son subespacios.
- (b) Sea X un conjunto con una distancia $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$. Probar que la topología inducida por la métrica es la mínima tal que d es continua.
Sugerencia: si d es continua, también lo es $d_{x_0} : X \rightarrow \mathbb{R}$, $d_{x_0}(x) = d(x, x_0)$.
16. Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos, y sea para cada $i \in I$ un subconjunto $A_i \subset X_i$. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas y cuáles falsas si se toma en $X = \prod_{i \in I} X_i$ la topología producto. ¿Y si se toma la topología caja?
- Si cada A_i es cerrado en X_i entonces $\prod_{i \in I} A_i$ es cerrado en X .

$$(b) \overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}.$$

17. Sea $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ una red de puntos en el espacio topológico $X = \prod_{i \in I} X_i$. Probar que $x_\alpha \rightarrow x$ si y sólo si $p_i(x_\alpha) \rightarrow p_i(x)$ para todo $i \in I$. ¿Es cierto esto si se toma en X la topología caja?
18. Se define en \mathbb{R} la métrica acotada como $\bar{d}(a, b) = \min\{|a - b|, 1\}$. Probar que induce la misma topología que la usual. Sea \mathbb{R}^ω el conjunto de las sucesiones de números reales. Se define en \mathbb{R}^ω la métrica uniforme como $\bar{p}((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sup_n \{\bar{d}(a_n, b_n)\}$. Verificar que la métrica uniforme es efectivamente una métrica.
19. Decidir si las siguientes funciones $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\omega$ son continuas tomando en \mathbb{R} la topología usual y tomando en \mathbb{R}^ω la topología uniforme, la topología producto y la topología caja.

$$f(t) = (t, 2t, 3t, \dots) \quad g(t) = (t, t, t, \dots) \quad h(t) = (t, \frac{1}{2}t, \frac{1}{3}t, \dots)$$

20. Decidir si las siguientes sucesiones convergen en \mathbb{R}^ω con las topologías uniforme, producto y caja.
- (a) $(1, 1, 1, 1, \dots), (0, 2, 2, 2, \dots), (0, 0, 3, 3, \dots), \dots$
- (b) $(1, 1, 1, 1, \dots), (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots), (0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots), \dots$
- (c) $(1, 0, 0, 0, \dots), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \dots), \dots$
- (d) $(1, 1, 0, 0, \dots), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, \dots), \dots$

21. Calcular la clausura del conjunto de las sucesiones eventualmente cero con respecto a las topologías uniforme, producto y caja.
22. Sea $\{f_i : X \rightarrow X_i\}_{i \in I}$ una familia inicial de funciones, y sea $f : X \rightarrow \prod X_i$ la función definida por

$$f(x) = (f_i(x))_{i \in I}$$

Sea Z la imagen de f . Probar que $f : X \rightarrow Z$ es abierta.

23. Sea X un espacio topológico, y sea $S = \{0, 1\}$ el espacio de **Sierpinski**, cuyos abiertos son $\emptyset, \{1\}$ y S . Probar que $A \subset X$ es abierto si y sólo si la función característica de A , $\chi_A : X \rightarrow S$, es continua. Probar que la familia $\{\chi_U\}_{U \in \mathcal{T}_X}$ es una familia inicial para la topología de X .
24. Probar que si $f : X \rightarrow Y$ es inyectiva y final entonces es subespacio.
25. Probar que si $f : X \rightarrow Y$ es suryectiva e inicial, entonces es cociente.
26. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Probar que si existe $g : Y \rightarrow X$ continua tal que $f \circ g = id_Y$, entonces f es un cociente.
27. Sea $p_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la proyección a la primer coordenada.

- (a) Sea X el subespacio $(\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y sea $g = p_1|_X$. Mostrar que g es cerrada pero no abierta.
- (b) Sea Y el subespacio $(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y sea $h = p_1|_Y$. Mostrar que h no es abierta ni cerrada pero es cociente.

28. Caracterizar el espacio cociente \mathbb{R}^2 / \sim en cada uno de los siguientes casos.

- (a) $(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \Leftrightarrow x_0 + y_0^2 = x_1 + y_1^2$.
- (b) $(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = x_1^2 + y_1^2$.

29. Sea Z el subespacio $\mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Definimos $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow Z$ por la fórmula

$$\begin{cases} g((x, y)) = (x, 0) & \text{si } x \neq 0 \\ g((0, y)) = (0, y) \end{cases}$$

- (a) ¿Es g un cociente? ¿Es g continua?
- (b) Hallar una base para la topología cociente en Z inducida por g .
30. Sea $X = \mathbb{C} \times \{0, 1\}$ con la topología producto, $\{0, 1\}$ con la topología discreta. Definimos en X la relación de equivalencia

$$(z, 0) \sim (w, 1) \Leftrightarrow z \cdot w = 1, \quad (z, j) \sim_2 (w, j) \Leftrightarrow z = w$$

Se le da a X/\sim la topología cociente. Probar que $f : X \rightarrow S^2$ definida por

$$f(x + iy, j) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2+y^2}(2x, 2y, 1-x^2-y^2) & \text{si } j = 0 \\ \frac{1}{1+x^2+y^2}(2x, -2y, x^2+y^2-1) & \text{si } j = 1 \end{cases}$$

induce un homeomorfismo $\bar{f} : X/\sim \rightarrow S^2$.

Sugerencia: Probar que \bar{f} es biyectiva; probar la continuidad de la inversa en los abiertos $S^2 \setminus \{P_N\}$, $S^2 \setminus \{P_S\}$, donde P_N y P_S son los polos.

31. Sea G un grupo. Un G -espacio es un espacio topológico X junto con una acción $G \times X \rightarrow X$ tal que $x \mapsto g \cdot x$ es continua para todo g . Probar que los siguientes espacios topológicos son G -espacios.

- (a) $X = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{Z}$ y la acción es $n \cdot x = n + x$.
- (b) $X = \mathbb{R}^2$, $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y la acción es $(n, m) \cdot (x, y) = (n + x, m + y)$.
- (c) $X = S^n$, $G = \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ y la acción es $\pm 1 \cdot x = \pm x$.
- (d) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{-1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\}$, $G = \mathbb{Z}$ y la acción es $m \cdot (x, y) = (m + x, (-1)^m y)$.

32. Si X es un G -espacio, podemos definir en X la relación de equivalencia

$$x \sim y \iff \exists g \in G \text{ tal que } y = g \cdot x.$$

El espacio de cociente resultante lo notamos con X/G , y consideramos en él la topología cociente. Probar que la proyección al cociente $p : X \rightarrow X/G$ es abierta, y que si G es finito, entonces p también es cerrada.

33. (a) Probar que el espacio cociente \mathbb{R}/\mathbb{Z} (ejercicio 31, a) es homeomorfo a S^1 .
- (b) Probar que el espacio cociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (ejercicio 31, b) es homeomorfo al toro $S^1 \times S^1$.
- (c) El espacio cociente S^n/\mathbb{Z}_2 (ejercicio 31, c) se nota $\mathcal{P}^n(\mathbb{R})$, y se llama el espacio proyectivo real de dimensión n .
- (d) Probar que el espacio cociente X/\mathbb{Z} (ejercicio 31, d) es homeomorfo a la banda de Möbius. (Recordar que la banda de Möbius se define como el cociente de $[0, 1] \times [0, 1]$ por la relación que identifica $(0, y)$ con $(1, 1 - y)$, $y \in [0, 1]$.)