Práctica 2

Medida Producto

1. Definición y propiedades

A lo largo de esta sección fijaremos dos espacios de medida σ-finita $(X, \mathcal{M}_X, \mu)$ y $(Y, \mathcal{M}_Y, \nu)$.

1. Sea en el producto cartesiano $X \times Y$ la clase $\mathcal{R}$ de rectángulos
$$\mathcal{R} = \{A \times B : A \in \mathcal{M}_X \ , \ B \in \mathcal{M}_Y\}.$$
Demuestre que $\mathcal{R}$ es una semiálgebra de conjuntos sobre $X \times Y$.

   Definición. La *σ-álgebra producto* $\mathcal{M}_X \otimes \mathcal{M}_Y$ se define como la σ-álgebra sobre $X \times Y$ generada por la semiálgebra $\mathcal{R}$.

2. Probar que $\mathcal{M}_X \otimes \mathcal{M}_Y$ coincide es también la σ-álgebra generada por las proyecciones $\pi_X : X \times Y \to X$ y $\pi_Y : X \times Y \to Y$ definidas por $\pi_X(x, y) = x$ y $\pi_Y(x, y) = y$.

3. Demuestre que si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}, (C_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_X$ y $(B_i)_{1 \leq i \leq n}, (D_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_Y$ son familias de conjuntos tales que
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \times B_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \times D_j$$
donde la unión es disjunta en cada caso entonces vale
$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\nu(B_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(C_j)\nu(D_j).$$

4. Sea la aplicación $\pi : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ definida por la fórmula
$$\pi\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \times B_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\nu(B_i)$$
donde la unión es disjunta. Mostrar que π está bien definida y que es σ-aditiva.

   Observar que como μ y ν son σ-finitas también lo será la aplicación π. Luego, por el Teorema de Extensión de Caratheodory-Hahn podemos extender a π a una medida definida sobre todo $\mathcal{M}_X \otimes \mathcal{M}_Y$ que denotaremos por $\mu \times \nu$. Notar que ésta es la única medida definida sobre $\mathcal{M}_X \otimes \mathcal{M}_Y$ que verifica
$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$
para todo $A \in \mathcal{M}_X$ y $B \in \mathcal{M}_Y$. Por este razón la medida $\mu \times \nu$ es denominada la *medida producto* sobre $X \times Y$.

5. **Principio de Cavalieri**. Demuestre que para todo $A \in \mathcal{M}_X \otimes \mathcal{M}_Y$ las secciones

$$A_x := \{y \in Y : (x, y) \in A\}$$

$$A_y := \{x \in X : (x, y) \in A\}$$

son medibles y que además vale

$$(\mu \times \nu)(A) = \int \mu(A_y)\, d\nu = \int \nu(A_x)\, d\mu.$$

6. **Teorema de Fubini-Tonelli**. Sea $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ medible y no negativa. Para $y \in Y$ y $x \in X$ definimos las aplicaciones $f_y : X \to [0, +\infty]$ y $f_x : Y \to [0, +\infty]$ mediante la fórmula

$$f_y(x) = f(x, y) = f_x(y).$$

   a) Probar que para todo $y \in Y$ y $x \in X$ las aplicaciones f_y y f_x son medibles.

   b) Probar que las aplicaciones

$$x \longmapsto \int_Y f_x(y)\, d\nu$$

$$y \longmapsto \int_X f_y(x)\, d\mu$$

   son medibles.

   c) Probar que

$$\int_{X \times Y} f(x, y)\, d(\mu \times \nu) = \int_Y \left[\int_X f_y(x)\, d\mu \right] d\nu = \int_X \left[\int_Y f_x(y)\, d\nu \right] d\mu.$$

7. **Teorema de Fubini**. Sea $f : X \times Y \to [-\infty, +\infty]$ una función $(\mu \times \nu)$-integrable.

   a) Probar que f_y es integrable para casi todo $y \in Y$ con respecto a la medida ν y que f_x es integrable para casi todo $x \in X$ con respecto a la medida μ.

   b) Probar que las aplicaciones

$$x \longmapsto \begin{cases} \int_Y f_x(y)\, d\nu & \text{si } \int_Y |f_x(y)|\, d\nu < +\infty \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$y \longmapsto \begin{cases} \int_X f_y(x)\, d\mu & \text{si } \int_X |f_y(x)|\, d\mu < +\infty \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

   son integrables.

   c) Probar que

$$\int_{X \times Y} f(x, y)\, d(\mu \times \nu) = \int_Y \left[\int_X f_y(x)\, d\mu \right] d\nu = \int_X \left[\int_Y f_x(y)\, d\nu \right] d\mu.$$

2. Relación con independencia de variables aleatorias

1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y sean $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ variables aleatorias. Probar que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

   a) Las variables aleatorias X e Y son independientes.

   b) $F_{XY} = F_X F_Y$.

   c) $P_{XY} = P_X \times P_Y$

   d) En el espacio de probabilidad $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2, P_{XY})$ las proyecciones canónicas π_1 y π_2 son variables aleatorias independientes.

2. *a*) Mostrar que si X e Y son variables aleatorias discretas

   $$X \text{ e } Y \text{ son independientes } \iff p_{XY} = p_X p_Y.$$

   b) Mostrar que si X e Y son variables aleatorias absolutamente continuas

   $$X \text{ e } Y \text{ son independientes } \iff f_{XY} = f_X f_Y.$$

3. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y sean $\mathcal{G}$ y $\mathcal{M}$ σ-álgebras independientes contenidas en $\mathcal{F}$. Probar que si $X \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$ e $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{M}, P)$ entonces

   $$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$