Práctica 1

Introducción

1. Extensión y unicidad de medidas

Definición. Sea Ω un conjunto y sea $\mathcal{S}$ una clase de subconjuntos de Ω. Decimos que $\mathcal{S}$ es una *semiálgebra* sobre Ω si verifica las siguientes condiciones:

(*a*) $\emptyset \in \mathcal{S}$ y $\Omega \in \mathcal{S}$

(*b*) $A, B \in \mathcal{S} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$

(*c*) $A \in \mathcal{S} \Longrightarrow A^c = \bigcup_{i=1}^n A_i$ con $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$ disjuntos.

Definición. Sea Ω un conjunto y sea $\mathcal{M}$ una clase de subconjuntos de Ω. Decimos que $\mathcal{M}$ es una *clase monótona* sobre Ω si verifica las siguientes condiciones:

(*a*) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ y $A_n \subseteq A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.

(*b*) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ y $A_{n+1} \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.

1. Sean Ω un conjunto y $\mathcal{S}$ una semiálgebra sobre Ω. Probar que la clase

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \left\{ A \in \Omega : A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ con } A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S} \text{ disjuntos} \right\}$$

es un álgebra de subconjuntos de Ω.

2. **Teorema de Extensión de Caratheodory-Hahn**. Sean $\mathcal{S}$ una semiálgebra de conjuntos y μ una medida sobre $\mathcal{S}$. Probar que μ admite una extensión a $\sigma(\mathcal{S})$.

3. **Teorema de la clase monótona**. Dado un álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$ consideremos $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ y $\sigma(\mathcal{A})$ la clase monótona y σ-álgebra generadas por $\mathcal{A}$, respectivamente. Mostrar que

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}).$$

4. Sean Ω un conjunto y $\mathcal{S}$ una semiálgebra sobre Ω. Probar que si dos medidas sobre $(\Omega, \sigma(\mathcal{S}))$ cualesquiera coinciden en $\mathcal{S}$ entonces también coinciden en $\sigma(\mathcal{S})$.

5. *a*) Probar que en el Teorema de Extensión de Caratheodory-Hahn la extensión resulta única si la medida μ es σ-finita sobre $\mathcal{S}$.

   b) Mostrar con un ejemplo que la unicidad de la extensión puede no ser cierta si la medida μ no es σ-finita sobre $\mathcal{S}$.

2. Teorema $\pi - \lambda$ de Dynkin

Definición. Sea Ω un conjunto y sea $\mathcal{P}$ una clase de subconjuntos de Ω. Decimos que $\mathcal{P}$ es un π-*sistema* si es cerrada por intersecciones finitas.

Definición. Sea Ω un conjunto y sea $\mathcal{D}$ una clase de subconjuntos de Ω. Decimos que $\mathcal{D}$ es un λ-*sistema* si verifica las siguientes condiciones:

(a) $\Omega \in \mathcal{D}$

(b) $A \in \mathcal{D} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{D}$

(c) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}$ y $A_n \cap \mathcal{A}_m = \emptyset$ si $n \neq m \Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$.

1. Verificar que la condición (b) en la definición de λ-sistema puede ser sustituida por la condición
$$(b') \ \ A, B \in \mathcal{D} \text{ y } A \subseteq B \Longrightarrow B \setminus A \in \mathcal{D}.$$
2. Probar que toda clase $\mathcal{C}$ que sea π-sistema y λ-sistema a la vez resulta una σ-álgebra.
3. **Teorema de Dynkin**. Sean $\mathcal{P}$ un π-sistema y $\mathcal{D}$ un λ-sistema tales que $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{D}$. Probar que $\sigma(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{D}$.
4. Sea $(\Omega, \sigma(\mathcal{P}))$ un espacio medible donde $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ y sean ν y μ dos medidas finitas definidas sobre $(\Omega, \sigma(\mathcal{P}))$ tales que $\mu(\Omega) = \nu(\Omega)$ y ambas coinciden sobre $\mathcal{P}$. Demuestre que si $\mathcal{P}$ es un π-sistema entonces ν y μ coinciden sobre $\sigma(\mathcal{P})$.

3. Funciones de distribución y medidas inducidas

1. Sean $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ dos espacios medibles y sea P una probabilidad en $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$. Dada una función medible $X : \Omega_1 \to \Omega_2$ para $A \in \mathcal{F}_2$ definimos
$$P_X(A) := P(X^{-1}(A)).$$
   a) Demuestre que P_X es una probabilidad en $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$.
   b) Sea $f : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ una función medible. Probar que
   $$f \ \ P_X\text{-integrable} \Longleftrightarrow f(X) \ \ P\text{-integrable}$$
   y que en este caso vale la igualdad
   $$\int_{\Omega_2} f \, dP_X = \int_{\Omega_1} f(X) \, dP \, .$$
2. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $Y : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ una variable aleatoria con $\int_\Omega Y \, dP = 1$. Definimos para $A \in \mathcal{F}$
$$\mu_Y(A) := \int_A Y \, dP$$
   a) Demostrar que μ_Y es una probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$.
   b) Obtener para f μ_Y-integrable una expresión para $\int_\Omega f \, d\mu_Y$ en términos de la probabilidad P.

3. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, X una variable aleatoria definida sobre este espacio y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función medible Borel. Mostrar que

   a) Si X es una variable aleatoria discreta y $g(X)$ es P-integrable entonces
   $$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x \in R_X} g(x)P(X = x)$$

   b) Si X es una variable aleatoria absolutamente continua con función de densidad f_X y $g(X)$ es P-integrable entonces
   $$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x)\, dx.$$

4. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y sea X una variable aleatoria definida sobre este espacio.

   a) i. Probar que
   $$X \text{ discreta } \iff P_X \ll \mathrm{N}_{\mathcal{A}_X}$$
   donde $\mathrm{N}_{\mathcal{A}_X}$ denota la medida de contar sobre $\mathcal{A}_X = \{x \in \mathbb{R} : p_X(x) > 0\}$, el conjunto de átomos de X.

   ii. Mostrar que si X es discreta entonces la función de probabilidad puntual p_X coincide con la derivada de Radon-Nikodym $\frac{dP_X}{d\mathrm{N}_{\mathcal{A}_X}}$.

   b) i. Probar que
   $$F_X \text{ absolutamente continua} \iff P_X \ll \mathcal{L}$$
   donde $\mathcal{L}$ denota la medida de Lebesgue sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.[1]

   ii. Mostrar que si X es absolutamente continua entonces F'_X coincide con la derivada de Radon-Nikodym $\frac{dP_X}{d\mathcal{L}}$.[2]

5. Sea $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ una función de distribución.

   a) Probar que existe una medida de probabilidad sobre el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tal que bajo dicha probabilidad la función identidad es una variable aleatoria con función de distribución acumulada F.

   b) Exhibir una variable aleatoria X definida sobre $\big([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], \mathcal{L}|_{[0,1]}\big)$ tal que su función de distribución acumulada sea F.

   c) Probar que si X_1 y X_2 son variables aleatorias no necesariamente definidas en un mismo espacio de probabilidad y tales que su función de distribución acumulada coincide entonces $P_{X_1} = P_{X_2}$.[3]

6. Probar que existe una variable aleatoria con función de distribución continua pero que no admite densidad.

   Sugerencia: Considerar la función de Cantor-Lebesgue.

[1] Una función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice absolutamente continua si es asbsolutamente continua en todo intervalo acotado $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

[2] Cuando X es una variable aleatoria absolutamente continua su derivada de Radon-Nikodym $\frac{dP_X}{d\mathcal{L}}$ es denominada la *función de densidad* de X.

[3] En particular, esto muestra que para definir una distribución basta con dar la función de distribución acumulada asociada.