

Práctica 5

- En cada uno de los casos siguientes, hallar el límite puntual de la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en el conjunto $S \subset \mathbb{R}$:
 - $f_n(c) = x^n$, $S = (-1, 1]$.
 - $f_n(x) = \frac{e^x}{x^n}$, $S = (1, +\infty)$.
 - $f_n(x) = n^2 x(1 - x^2)^n$, $S = [0, 1]$.
- Probar que la sucesión del ejercicio 1(a) converge uniformemente en $T = (0, 1/2)$, pero en $S = (-1, 1]$ converge puntualmente a una función que no es continua.
 - Probar que la sucesión del ejercicio 1(b) converge uniformemente en $T = [2, 5]$.
- Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones en los conjuntos indicados:
 - $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$, sobre todo $\mathbb{R}$.
 - $f_n(x) = \sin(\frac{x}{n})$, sobre todo $\mathbb{R}$.
 - $f_n(x) = \frac{n}{n+1}x$, sobre todo $\mathbb{R}$.
- Sea $S \subset \mathbb{R}$ y sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $f_n : S \rightarrow \mathbb{R}$ que converge uniformemente a una función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. Probar que si f_n es acotada para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces vale:
 - f es acotada.
 - Existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in S$ y todo $n \in \mathbb{N}$ (en otras palabras, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente acotada).
- Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de funciones $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = n^2 x(1 - x)^n.$$
 - Probar que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente a la función cero en el intervalo $[0, 1]$.
 - Verificar que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ pero que el límite no puede ‘pasar adentro de la integral’. Es decir, ver que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) dx$.
- Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones derivables definidas sobre el intervalo $[a, b]$. Supongamos que $\{f'_n\}$ converge uniformemente en $[a, b]$. Probar que si existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $\{f_n(x_0)\}$ converge, entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[a, b]$.