Práctica 4

1. Analizar en cada caso la existencia de $\int_a^b f\,d\alpha$ y calcularla cuando corresponda.

   (a) $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función arbitraria y f una función constante sobre $[a,b]$.

   (b) $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua , $c \in (a,b)$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) := \begin{cases} 5 & \text{si } x \in [a,c) \\ 3 & \text{si } x = c \\ -1 & \text{si } x \in (c,b] \end{cases}$.

   ¿Qué sucede si en lugar de tomar α continua sólo se sabe que α es continua en un entorno de c?

   (c) f como en el ítem anterior y $\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a,c] \\ -1 & \text{si } x \in (c,b] \end{cases}$.

   (d) $f(x) = x^3$, $\alpha(x) = x^2$ y $[a,b] = [-1,3]$.

   (e) $f(x) = \alpha(x) = \cos(x)$ y $[a,b] = [0, \frac{\pi}{4}]$.

2. Sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$, tales que f es continua e integrable respecto de α en $[a,b]$ y sea c en (a,b). Si $\beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ satisface $\beta(x) = \alpha(x)$ para todo $x \neq c$, probar que $f \in \Re(\beta)$ en $[a,b]$ y $\int_a^b f\,d\alpha = \int_a^b f\,d\beta$.

   ¿Qué sucede si $c = a$ o $c = b$?.

3. Dadas las funciones siguientes definidas en el intervalo $[0,2]$:

   $$f(x) = |x-1| \quad , \ \alpha(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x = 0 \\ e^x & \text{si } x \in (0,2] \end{cases},$$

   demostrar que $f \in \Re(\alpha)$ en $[0,2]$ y hallar el valor de $\int_0^2 f\,d\alpha$.

4. Sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ y sea $c \in (a,b)$ tales que $f \in \Re(\alpha)$ en $[a,c]$ y $f \in \Re(\alpha)$ en $[c,b]$. Demostrar que $f \in \Re(\alpha)$ en $[a,b]$ y $\int_a^b f\,d\alpha = \int_a^c f\,d\alpha + \int_c^b f\,d\alpha$.

5. Si $\int_a^b f d\alpha$ existe y es igual a 0 para toda función monótona creciente f. ¿Qué puede decirse sobre la función α? *Sugerencia.* Para cada $c \in [a,b]$ considere la función monótona f_c definida como $f_c(x) = 0$ si $a \leq x \leq c$ y $f_c(x) = 1$ sino.

6. Sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$. Para cada partición $\pi = \{x_0, ..., x_n\}$ del intervalo $[a,b]$, se define $s_\pi := \sum_{k=1}^{n} f(t_k)[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})]$, donde $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

   Demostrar que si $f \in \Re(\alpha)$ entonces existe una sucesión de particiones $(\pi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ que cumple las condiciones:

(a) $(\pi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es monótona en el sentido siguiente: si $m < m'$ entonces $\pi_m \subset \pi_{m'}$.

(b) $\lim\limits_{m\to\infty} \| \pi_m \| = 0$.

(c) $\lim\limits_{m\to\infty} s_{\pi_m} = \int\limits_a^b f\ d\alpha$, independientemente de la elección de los t_k en cada suma s_{π_m}.

(d) Si $(\sigma_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es otra sucesión monótona de particiones tal que $\pi_m \subset \sigma_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, entonces cumple las condiciones (b) y (c) precedentes.

Si ahora $g, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ son otras funciones, tales que $g \in \Re(\beta)$ y para cada partición π notamos $r_\pi := \sum\limits_{k=1}^{n} g(t_k)[\beta(x_k) - \beta(x_{k-1})]$, donde $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, deducir que entonces existe una sucesión de particiones $(\pi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{m\to\infty} s_{\pi_m} = \int\limits_a^b f d\alpha$ y $\lim\limits_{m\to\infty} r_{\pi_m} = \int\limits_a^b g\ d\beta$.

7. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ monótona creciente. Demostrar que si $f \in \Re(\alpha)$ en $[a,b]$ y $[c,d] \subset [a,b]$, entonces $f \in \Re(\alpha)$ en $[c,d]$.

8. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ monótona creciente.

   (a) Demostrar que existe $c \in [a,b]$ tal que $\int\limits_a^b f\ d\alpha = f(c)\,(\alpha(b) - \alpha(a))$.

   (b) Suponiendo que α es además derivable en (a,b) (pero no necesariamente de clase C^1), demostrar que la función
   $$\psi(x) = \int_a^x f\ d\alpha$$
   es derivable en (a,b) y que $\psi'(x) = f(x)\alpha'(x)$ para todo $x \in (a,b)$.

9. Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ y sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ monótona creciente. Demostrar que si $f, g \in \Re(\alpha)$ y $f(x) \le g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $\int\limits_a^b f\ d\alpha \le \int\limits_a^b g\ d\alpha$.

   Deducir que si $f \in \Re(\alpha)$ entonces $\left|\int_a^b f\ d\alpha\right| \le \int\limits_a^b |f|\ d\alpha$.

10. Analizar la existencia de las integrales que siguen y calcular su valor cuando éstas existan.

    (a) $\int\limits_0^4 x^2\ d([x])$ (b) $\int\limits_0^2 x\ d(x - [x])$ (c) $\int\limits_0^2 [x]\ d([x])$

11. Demostrar que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función de variación acotada entonces es integrable Riemann.

12. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 en $[a, b]$.

   (a) Demostrar que f es de variación acotada.

   (b) Demostrar que vale la igualdad $V_f(a, b) = \int\limits_a^b |f'(x)|\ dx$.

13. Sea $f, \alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ tales que f es una función continua y α es de variación acotada.

   (a) Demostrar que $|f| \in \Re(V_\alpha)$.

   (b) Demostrar que vale la desigualdad $\left|\int_a^b f\ d\alpha\right| \leq \int\limits_a^b |f|\ dV_\alpha$. *Sugerencia.* Tener en cuenta el ejercicio 6.

   (c) Deducir de (b) que $\left|\int_a^b f\ d\alpha\right| \leq V_\alpha(a, b) \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

   (d) Para cada $x \in [a, b]$ se define $\psi(x) = \int_a^x f\ d\alpha$ (observar que ψ está bien definida). Probar que ψ es de variación acotada.

   (e) Si α es Lipschitz en $[a, b]$, probar que la función ψ definida en el ítem anterior también es Lipschitz en $[a, b]$.