

Práctica 2

1. Decir qué propiedades (abierto, cerrado, acotado) tienen los siguientes conjuntos.

- a) \mathbb{Q} .
- b) \mathbb{N} .
- c) $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.
- d) $(0, 1]$.
- e) $\{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$.
- f) $\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

2. Sean S, T subconjuntos de \mathbb{R} . Demostrar las propiedades siguientes:

- a) Si $S \subseteq T$ entonces $S^\circ \subseteq T^\circ$.
- b) $(S \cap T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$. ¿Se puede generalizar esta igualdad a una intersección infinita?
- c) $(S \cup T)^\circ \supseteq S^\circ \cup T^\circ$. ¿Vale la igualdad?
- d) $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$. ¿Se puede generalizar esta igualdad a una unión infinita?
- e) $\overline{S \cap T} \subseteq \overline{S} \cap \overline{T}$. ¿Vale la igualdad?
- f) $(\mathbb{R} - S)^\circ = \mathbb{R} - \overline{S}$.

3. En cada uno de los siguientes casos hallar S°, \overline{S} y ∂S .

- a) $S = [0, 1]$.
- b) $S = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.
- c) $S = [-1, 0) \cup \{1\}$.
- d) $S = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$.
- e) $\left\{ \frac{(-1)^n n}{1+n} : n \in \mathbb{N} \right\}$.
- f) $S = \mathbb{Z}$.

4. Sea $S \subset \mathbb{R}$. Demostrar :

- a) S es abierto si y solo si es disjunto con ∂S .
- b) S es cerrado si y solo si $\partial S \subset S$.
- c) S es cerrado si y solo si $\mathbb{R} - S$ es abierto.

5. Sea $S \subset \mathbb{R}$. Demostrar que $\partial S = \overline{S} \cap \overline{\mathbb{R} - S}$.

6. Si $S \subset \mathbb{R}$ notamos con S' al conjunto de todos los puntos de acumulación de S .
- Hallar S' para cada uno de los conjuntos del ejercicio 3.
 - Un punto $p \in S$ se dice *punto aislado* de S si existe $\varepsilon > 0$ tal que $(p - \varepsilon, p + \varepsilon) \cap S = \{p\}$. Demostrar que $\bar{S} = S' \cup \{\text{puntos aislados de } S\}$.
7. Hallar los puntos de acumulación del conjunto $S = \{(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}) : n, m \in \mathbb{N}\}$.
8. Hallar todos los subconjuntos no vacíos de \mathbb{R} que son a la vez abiertos y cerrados.
9. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, se considera el intervalo abierto $I_n := (\frac{1}{n}, \frac{2}{n})$. Demostrar que $(0, 1) = \bigcup_{n \geq 2} I_n$. ¿Existe un conjunto *finito* $\mathcal{F} \subset \mathbb{N}_{\geq 2}$ tal que $(0, 1) = \bigcup_{n \in \mathcal{F}} I_n$? Justificar. ¿Qué puede decir sobre la compacidad del conjunto $(0, 1)$?
10. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son compactos:
- \mathbb{Q} .
 - $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.
 - \mathbb{R} .
 - $[0, 1] \cup [100, 1000]$.
 - $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.
 - $\{\sqrt[n]{n} : n \in \mathbb{N}\}$.
11. Sea K un subconjunto compacto no vacío de \mathbb{R} . Probar que K tiene mínimo y máximo.
12. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada y sea P el conjunto de sus puntos límite. Probar que P es compacto. Mostrar que el límite inferior de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es el mínimo de P y el límite superior de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ el máximo.
13. Sean $S, T \subset \mathbb{R}$ conjuntos compactos. Demostrar que $S \cup T$ y $S \cap T$ son compactos. ¿Qué ocurre si se toman uniones o intersecciones infinitas?
14. Mostrar que si K es compacto y F es cerrado, entonces $K \cap F$ es compacto.
15. Determinar todos los subconjuntos de \mathbb{R} que tienen la siguiente propiedad: *Todo cubrimiento cerrado tiene un subcubrimiento finito*.
16. Sea $K \subset \mathbb{R}$ compacto. Probar que los siguientes conjuntos también son compactos:
 $S = \{x + y : x, y \in K\}$, $P = \{x \cdot y : x, y \in K\}$.
17. Mostrar una sucesión decreciente $\{F_n\}$ de conjuntos cerrados no vacíos y una sucesión decreciente $\{E_n\}$ de conjuntos acotados no vacíos tales que $\bigcap_n F_n = \emptyset$ y $\bigcap_n E_n = \emptyset$.
18. Sean $S \subset \mathbb{R}$ y $p \in \mathbb{R}$. Se define la *distancia* $d(p, S)$ entre p y S como

$$d(p, S) := \inf\{|p - x| : x \in S\}.$$

- a) Demostrar que $|d(p, S) - d(q, S)| \leq d(p, q)$ para todo $p, q \in \mathbb{R}$.
- b) Hallar todos los $p \in \mathbb{R}$ tales que $d(p, S) = 0$.
- c) Demostrar que si S es cerrado la distancia entre un punto p y el conjunto S se realiza, es decir, existe $q \in S$ tal que $d(p, S) = |p - q|$.
- d) Sea $\varepsilon > 0$ y sea $G = \{v \in \mathbb{R} : d(v, S) < \varepsilon\}$. Demostrar que G es abierto.

19. Sean $S, T \subset \mathbb{R}$. Se define la *distancia* entre S y T como

$$d(S, T) = \inf\{|x - y| : x \in S, y \in T\}.$$

- a) ¿Es cierto que $d(S, T) = \inf\{d(p, T) : p \in S\}$?
- b) Mostrar que no necesariamente siempre existen $p \in S$ y $q \in T$ tales que $d(S, T) = |p - q|$.
- c) ¿Qué ocurre con la pregunta anterior si S y T son compactos? ¿Y si los dos son cerrados? ¿Y si uno es compacto y el otro cerrado?