

1. Probar que el conjunto $\{x^2 : x \in \mathbb{R}\}$ no tiene cota superior.
2. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío tal que A tiene cota superior. Sea

$$B = \{b : b \text{ es cota superior de } A\}.$$

Probar que $\inf B = \sup A$.

3. Sean $\{x_n\}$ una sucesión. Probar que $x_n \rightarrow x$ si y solo si, para toda subsucesión $\{x_{n_k}\}$ existe una subsubsucesión $\{x_{n_{k_j}}\}$ que converge a x .
4. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones de Cauchy en \mathbb{R} . Probar que $c_n = |a_n - b_n|$ es convergente.
5. Construir un conjunto acotado en \mathbb{R} con 4 puntos de acumulación. Construir un compacto con exactamente numerables puntos de acumulación.
6. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Probar que $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$ es cerrado.
7. Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R} : f \text{ es continua en } x\}$. Probar que existen abiertos A_n tales que $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ y $\mathcal{C} = \bigcap A_n$.
8. Sea $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Probar que f es continua.
9. Sea f una función continua y P -periódica. Probar que f alcanza un máximo y un mínimo.
10. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no compacto.
 - (a) Probar que existe una función definida y continua en A que no es acotada;
 - (b) Probar que existe una función definida y continua en A que es acotada pero no tiene máximo;
 - (c) Si además A es acotado, existe f definida y continua en A que no es uniformemente continua.