1. Se tira un dado equilibrado. Si el resultado es múltiplo de 2, se sacan con reposición 2 bolitas de una urna que contiene 2 bolitas blancas y 3 rojas. Si el resultado del dado no es múltiplo de 2, se sacan 3 bolitas sin reposición de la misma urna. Se define X como el número de bolitas rojas e Y = resultado del dado. Hallar p_X, p_Y, p_{XY}, $p_{X|Y}$, $p_{Y|X}$.

2. *a*) Sean X e Y v. a. independientes. Probar que si:
   i. $X \sim \mathcal{B}i(n,p)$, $Y \sim \mathcal{B}i(m,p) \Rightarrow X|X+Y=k \sim \mathcal{H}(m+n,n,k)$.
   ii. $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu) \Rightarrow X|X+Y=k \sim \mathcal{B}i\left(k, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$

   b) Probar que si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \mid X=k \sim \mathcal{B}i(k,p) \Rightarrow Y \sim \mathcal{P}(\lambda p)$

3. Un señor se va a pescar un fin de semana. La cantidad de peces que pican en el lapso de una hora sigue una distribución $\mathcal{P}(\lambda)$. Además cada pez tiene probabilidad q de zafarse y $1-q=p$ de ser atrapado.
   Sean X = cantidad de peces que pican, e Y = cantidad de peces atrapados.

   a) Mostrar que Y tiene distribución $\mathcal{P}(\lambda p)$.
   b) Mostrar que la distribución de $(X-Y)|Y=y$ es $\mathcal{P}(\lambda(1-p))$. ¿Son $X-Y$ e Y independientes?
   c) Encontrar el valor esperado del número de peces atrapados.

4. Para decidir quién paga la cena, 2 amigos sacan 2 bolitas cada uno de una urna que contiene 3 bolitas blancas y 2 negras. El primero de ellos hace sus extracciones sin reponer. A continuación de la urna resultante el otro saca sus 2 bolitas con reposición. Si sacan igual número de bolitas blancas cada uno paga su cuenta, sino, la cuenta la paga el que haya sacado más blancas. Encontrar la probabilidad de que alguno pague las 2 cuentas.

5. Sea X tal que $E(X^2) < \infty$.

   a) Verificar que:
   $$Var[E(X|Y)] = E[E^2(X|Y)] - E^2(X)$$
   Notar que no estamos trabajando con la varianza condicional de $X|Y$ (que es una variable aleatoria, $Var\,(X|Y) = E\left[[X - E\,(X|Y)]^2\,|Y\right]$) sino con la varianza de la variable $E(X|Y)$, que es un número.

   b) Verificar que:
   $$E[E^2(X|Y)] = E[XE(X|Y)]$$
   Sugerencia: $E(X|Y) = h(Y)$.

   c) Probar que:
   $$Var(X) = Var[E(X|Y)] + E\{[E(X|Y) - X]^2\}$$

   d) Deducir que:
   $$Cov[X - E(X|Y), E(X|Y)] = 0.$$
   Interpretar geométricamente.

6. (Suma de un número aleatorio de variables aleatorias.) Sea X tal que $E(X^2) < \infty$. Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ una sucesión, de variables aleatorias i.i.d. con esperanza y varianza finita, y N una variable aleatoria independiente de las X_i con $R_N \subset \mathbb{N}$.

   a) Probar que $E\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] = E(N)E(X_1)$.
   b) Probar que
   $$Var\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] = E(N)var(X_1) + E^2(X_1)var(N).$$
   c) El número de reclamos recibido por una compañía de seguros en una semana es una variable aleatoria Poisson de parámetro λ. El monto pagado por cada uno de esos reclamos es una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2. Hallar la esperanza y la varianza del total pagado por la compañía en concepto de reclamos en una semana. ¿Qué hipótesis se están haciendo? ¿son razonables?

7. La llegada de un tren a la estación se produce con distribución uniforme entre las 10 y las 10 hs. 20 min. La partida se produce con distribución uniforme entre la llegada del tren y las 11 hs. Sean X = hora de llegada, Y = hora de partida.

   a) Hallar la función de densidad de X; la densidad de $Y|X=x$ y la densidad de Y.

b) Calcular la probabilidad de que el tren haya llegado a la estación entre las 10:10 y 10:15 sabiendo que partió a las 10:25 horas.

c) Calcular $cov(X, Y)$.

d) Calcular el mejor predictor lineal de Y basado en X.

e) Hallar $E(Y)$ de dos modos distintos.

8. Sean X e Y v. a. continuas tales que $Y \sim \Gamma(2, \lambda)$, $X|Y = y \sim \mathcal{U}(0, y)$.

a) Hallar f_{XY}, f_X.

b) Calcular $P(Y \geq 2|X \leq 1)$ si $\lambda = 1$.

9. Sea (X, Y) un vector aleatorio con densidad:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{y^2}{2x^3} \exp\left(-x - \frac{y}{x}\right) I_{[0,\infty)\times(0,\infty)}(x, y).$$

a) Hallar la densidad de $Y|X = x$ y decir a qué familia pertenece.

b) Hallar la densidad de $\frac{Y}{X}$ sin usar el teorema de cambio de variables.

c) Calcular $P\left(1 < \frac{Y}{X} < 4|X = 3\right)$.

10. *a*) El vector (X, Y) tienen distribución normal bivariada si su densidad conjunta es de la forma:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right]\right\}$$

Mostrar que la densidad de $X|Y = y$ es normal con parámetros $\mu_X + \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mu_Y)$ y $\sigma_X^2(1 - \rho^2)$.

b) Las edades de los futuros padres que van a tener a sus hijos en un determinado hospital pueden ser aproximadas por una distribución normal bivariada con parámetros $\mu_X = 28{,}4$, $\sigma_X = 6{,}8$, $\mu_Y = 31{,}6$, $\sigma_Y = 7{,}4$ y $\rho = 0{,}82$ (los parámetros con el índice X se refieren a la edad de la mujer embarazada y los que tienen el índice Y a los de su esposo).

1) Determinar la proporción de embarazadas de más de 30 años.

2) Sabiendo que el esposo tiene 35 años, hallar la probabilidad de que la mujer tenga más de 30 años. (Dicho de otro modo, hallar la proporción de hombres casados de 35 años cuyas mujeres tienen más de 30 años.)

11. Sea (X, Y) un v.a. bidimensional tal que:

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{3x^2}{y^3} I_{(0<x<y)}$$

$$f_Y(y) = 5y^4 I_{(0,1)}^{(y)}$$

a) Hallar la densidad de $U = \frac{X}{Y}$ sin usar el teorema de cambio de variables.

b) Calcular $P\left(-2 < Y < \frac{\sqrt{3}}{2}|X = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

12. Sea (X, Y) v. a. tal que $X \sim \varepsilon(\frac{1}{2})$ e $Y|X = x \sim \mathcal{U}(0, x^2)$.

a) Hallar la distribución de $\frac{Y}{X^2}$ sin usar el teorema de cambio de variables.

b) Calcular $E(X)$, $E(Y)$, $\text{cov}(X, Y)$.

c) Encontar el mejor predictor cuadrático de Y basado en X. ¿Qué observa?

13. Sea (X, Y) un vector aleatorio tal que: $X|Y = y \sim \mathcal{P}(y)$, $Y \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, $\alpha > 0$, $\lambda > 0$. Probar que $Y|X = n \sim \Gamma(\alpha + n, \lambda + 1)$, $n \in \mathbb{N}$.

14. Sea (X, Y) un vector aleatorio tal que: $X|Y = y \sim \mathcal{B}i(n, y)$, $Y \sim \beta(p, q)$. Probar que $Y|X = k \sim \beta(p+k, q+n-k)$, $0 \leq k \leq n$.

15. *a*) Sean X e Y v. a. tales que $Y|X = x$ tiene distribución $F(y)$ que no depende de x. Probar que entonces X e Y son independientes y $F_Y(y) = F(y)$.

b) Usando 15*a* encontrar la distribución de $Z = XY$ cuando $X \sim \chi^2(p)$, $Y \mid X = x \sim \Gamma(n, \lambda x)$.

16. Sean X e Y v. a. tales que $Y \sim \mathcal{U}[2,3]$, $X|Y=y$ es una v. a. discreta que satisface

x	-1	0	1
$p_{X\|Y}(x\|y)$	$\frac{3-y}{2}$	$y-2$	$\frac{3-y}{2}$

a) Hallar p_X.

b) Calcular la función de distribución $F_{Y|X=x}(y)$ y $P\left(\frac{3}{2} \leq Y \leq \frac{9}{4}|X=x\right)$.

17. Sean X e Y v. a. que satisfacen $X|Y=y \sim \varepsilon(y)$ e Y es tal que:

y	1	2
$p_Y(y)$	1/4	3/4

a) Calcular $F_X(x)$ y $f_X(x)$.

b) Calcular $P(Y=y, X \leq x)$ para $y=1{,}2$, $x>0$.

c) Expresar $P(Y=y, X \leq x)$ en función de $P(Y=y|X=t)$.

d) Deducir de 17*c* el valor de $P(Y=1|X=x)$ para $x>0$.