En cada ejercicio definir las variables / vectores aleatorias involucradas y cuando sea posible identifique su distribución.

1. Sea (X, Y) un vector aleatorio cuya función de densidad conjunta es:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{4ab} I_{|x| \leq a} I_{|y| \leq b}$$

para $a, b > 0$, es decir, el vector (X, Y) tiene distribución uniforme en el rectángulo $[-a, a] \times [-b, b]$.

   a) Hallar f_X, f_Y, F_{XY}.
   b) Para $a = 1, b = 1$, calcular $P(2X \leq Y), P(X^2 - Y = 0)$.
   c) Decir si X e Y son independientes justificando la respuesta.

2. Sean X, Y, Z v.a.i.i.d. $\mathcal{U}[0, 1]$. Calcular $P(X \geq YZ)$.

3. Sea (X, Y) una v. a. con densidad uniforme en el trapecio de vértices $(-6, 0)$, $(-3, 4)$, $(3, 4)$, $(6, 0)$.

   a) Obtener la función de densidad conjunta de (X, Y) y las marginales de X y de Y.
   b) Decir si X e Y son independientes justificando la respuesta.

4. Se define el soporte de la probabilidad P definida sobre el espacio de probabilidad $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}_k)$

$$\begin{aligned} \operatorname{sop}(P) &= \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \mid P(B_\varepsilon(\mathbf{x})) > 0, \quad \forall \varepsilon > 0\right\} \\ \text{donde } B_\varepsilon(\mathbf{x}) &= \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k \mid \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \varepsilon\right\} \end{aligned}$$

   a) Probar que si $X = (X_1, X_2)$ es un vector aleatorio que induce la probabilidad $P_X = P$ en $\mathbb{R}^2$, es decir $P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right)$ $\forall B \in \mathcal{B}_2$, se cumple que: si $\operatorname{sop}(P) \neq \operatorname{sop}(P_1) \times \operatorname{sop}(P_2)$, donde P_i son las marginales, entonces X e Y no son independientes.
   b) Volver a responder $1c$ y $3b$.

5. Sea (X, Y) un vector aleatorio cuya función de densidad conjunta es:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{6}{7}(3y + x) & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Hallar $E(X)$, $E(Y)$, $\operatorname{var}(X)$, $\operatorname{var}(Y)$, $E(XY)$, $\operatorname{cov}(X, Y)$, $\operatorname{var}(X - Y)$, $\rho(X, Y)$.

6. Mostrar con un ejemplo que $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$ no implica que X e Y sean independientes.

7. Sean X e Y v.a. independientes. Probar que si:

   a) $X \sim \Gamma(p, \lambda)$, $Y \sim \Gamma(q, \lambda) \Rightarrow X + Y \sim \Gamma(p + q, \lambda)$. ¿Sigue valiendo si se saca la hipótesis de independencia?
   b) $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \Rightarrow X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$. ¿Sigue valiendo si se saca la hipótesis de independencia?

8. Sean X e Y v.a. independientes con distribución $\varepsilon(\lambda)$. Probar que $X + Y$ y $\dfrac{X}{Y}$ son independientes.

9. Sean X_1, X_2, X_3 v.a. independientes con distribución $\mathcal{U}[-1, 1]$. Sea $U = \frac{X_1 + X_2}{2}$. Verificar que:

$$f_U(u) = (u + 1) I_{(-1,0)}(u) + (1 - u) I_{(0,1)}(u).$$

10. Sean X e Y v.a. independientes con distribución $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Sea (ρ, θ) la expresión de (X, Y) en coordenadas polares, es decir $(X, Y) = (\rho \cos(\theta), \rho \operatorname{sen}(\theta))$, $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

    a) Probar que ρ y θ son independientes.
    b) Hallar la probabilidad de que el par (X, Y) caiga en el círculo de centro en el origen y radio σ.
    c) Mostrar que θ tiene distribución uniforme.
    d) Notar que de esto se deduce que $P(X > 0, Y > 0) = P(X > 0, Y < 0) = \frac{1}{4}$. Probarlo.

11. Sea (X, Y) con función de densidad

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{para } |x| < 1,\ 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

a) Hallar f_X, f_Y.

b) Determinar si X e Y son independientes.

c) Probar que $U = \dfrac{Y}{X^2}$ es $\mathcal{U}[0,1]$.

12. Sea $Z \sim N(0,1), X_1 \sim \chi^2(n)$ y $X_2 \sim \chi^2(m)$, variables aleatorias independientes.

a) Probar que

$$U = \frac{Z}{\sqrt{X_1/n}}$$

tiene distribución t de Student con n grados de libertad con densidad dada por

$$f_U(u) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)\sqrt{\pi n}} \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}.$$

b) Probar que

$$V = \frac{X_1/n}{X_2/m}$$

tiene distribución F de Snedecor con n y m grados de libertad con función de densidad

$$f_V(v) = \frac{\Gamma((m+n)/2)}{\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)} \left(\frac{n}{m}\right)^{n/2} v^{(n/2)-1} \left(1 + \frac{n}{m}v\right)^{-(n+m)/2} I_{(0,\infty)}(v).$$