En cada ejercicio definir las variables aleatorias involucradas y cuando sea posible identifique su distribución.

1. Hallar la esperanza y varianza de las siguientes variables aleatorias:

   a) $\Gamma(\alpha, \lambda)$. *Sugerencia*: recordar (y usar) que si $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, entonces $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$, cualquiera sean los valores de α y λ positivos.

   b) $\varepsilon(\lambda)$.

   c) $\chi^2(n)$.

   d) $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

   e) $\mathcal{U}[a, b]$.

   f) $\beta(a, b)$. *Sugerencia*: recordar (y usar) que si $X \sim \beta(a, b)$, entonces $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$, cualquiera sean los valores de a y b positivos.

2. Sea X una v.a. continua con función de distribución F. Sea $Y = F(X)$. Mostrar que $Y \sim \mathcal{U}[0, 1]$.

3. Sea Z una v.a. con distribución normal estándar. Probar que Z^2 tiene distribución $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \chi_1^2$.

4. Se dice que una v.a. X tiene distribución log-normal si su densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\, x\, \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] I_{(0,+\infty)}(x).$$

   Comprobar que si X es log-normal de parámetros μ y σ^2 entonces $Y = \ln X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

5. Se dice que una v.a. X tiene distribución Weibull de parámetros α y β (W(α, β)) si su densidad es:

$$f(x) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right] I_{(0,+\infty)}(x) \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

   Ver que si X es una v.a. con esta densidad entonces $Y = (X/\alpha)^{\beta} \sim \varepsilon(1)$.

6. Sea X una variable aleatoria con distribución $\mathcal{U}[0, 1]$. Hallar las funciones de distribución y de densidad de las siguientes variables aleatorias:

   a) $cX + d$

   b) $\dfrac{X}{X+1}$

   c) $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1 - X), \qquad \lambda > 0.$

7. Sea U una variable con distribución $\mathcal{U}(0,1)$. Encontrar una función g tal que $g(U)$ tenga distribución

   a) $\mathcal{E}(1)$.

   b) Doble exponencial. Es decir con densidad

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}.$$

   c) Bi$(5, 1/3)$.

   d) Una distribución discreta con rango numerable $R_X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y respectivas probabilidades $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

8. Don Zoilo tiene dos vacas (Aurora y Belinda). La cantidad de leche (en litros) que da Aurora en un día es una variable aleatoria $X \sim \mathcal{E}(0{,}2)$. Es decir, su función de densidad es

$$f_X(x) = 0{,}2 e^{-0{,}2x} I_{(0,+\infty)}(x).$$

   Belinda, en cambio, da 5 litros el 20 % de las veces y el resto no da nada. Don Zoilo ordeña a Belinda solamente los días en que Aurora da menos de 6 litros.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que Aurora dé más de 6 litros en exactamente dos días de la próxima semana? (los fines de semana no la ordeñan).

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que Don Zoilo obtenga más de 8 litros en un día?

c) Con la leche que obtiene de Aurora, Don Zoilo fabrica manteca. La cantidad de manteca (en kilos) que obtiene con X litros de leche es $W = g(X)$ siendo

$$g(X) = \begin{cases} \sqrt[3]{X} & \text{si } X \leq 8 \\ \frac{1}{7}(X-1)^2 - 5 & \text{si } 8 < X \leq 15 \\ 2X - 7 & \text{si } 15 < X \end{cases}$$

Hallar la función de densidad de la cantidad de manteca.

9. Se dice que una v.a. X tiene distribución simétrica respecto de θ sii:

$$P(X \leq \theta - h) = P(X \geq \theta + h) \qquad \forall h > 0$$

a) Si $E(|X|) < \infty$ y X es una v. a. absolutamente continua y simétrica respecto de m, probar que $E(X) = m$.

b) Se dice que una v. a. X tiene distribución logística si su densidad es

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i. Probar que X tiene distribución simétrica en torno a 0. Hallar la $E(X)$.

ii. Hallar la densidad de $Y = e^X$ y su esperanza. ¿A qué familia de distribuciones pertenece?

10. Sea $X \sim \mathrm{N}(0,1)$ y W independiente de X tal que $P(W=1) = P(W=0) = \frac{1}{2}$. Definimos

$$\begin{aligned} Y &= \begin{cases} X & \text{si } W = 1 \\ -X & \text{si } W = 0 \end{cases} \\ &= XI_{\{1\}}(W) - XI_{\{0\}}(W) \end{aligned}$$

a) ¿Son X e Y independientes?

b) ¿Son Y y W independientes?

c) Mostrar que $Y \sim \mathrm{N}(0,1)$.

d) Mostrar que $cov(X,Y) = 0$.

11. *a*) Sea X una v.a. discreta, con $R_X = \mathbb{N}_0$, probar que

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n).$$

b) Sea X una v.a. cualquiera. Probar que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n) \leq E(|X|) \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n)$$

Concluir que

$$E(|X|) < \infty \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n) < \infty.$$

Sugerencia: Notar que $[|X|]$ (parte entera del módulo de X) es una variable aleatoria discreta y usar 11*a*.

12. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. independientes con distribución $\mathcal{U}(0,1)$, y sean $X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$ los estadísticos de orden.

a) Hallar la distribución de $X^{(i)}$.¿A qué familia pertenece?

b) Hallar $E\left(X^{(i)}\right)$. ¿Qué relación guardan las esperanzas entre sí?

c) Calcular $var\left(X^{(i)}\right)$.

d) ¿Para qué valor de i se minimiza la varianza? ¿Para cuál se maximiza?

13. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. independientes tales que:

$$P(X_k \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si} & t < 0 \\ t^k & \text{si} & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si} & t > 1 \end{cases} \qquad k = 1, \ldots, n$$

a) Sea $Y = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Hallar F_Y, f_Y, $E(Y)$.

b) Hallar $E(X_1 \cdots X_n)$.

c) Sean X_1 y X_2 v.a.i.i.d. con $X_i \sim \mathcal{U}[0,1]$. Calcular $E(Y)$ y $E(Z)$ donde $Y = \text{mín}(X_1, X_2)$, $Z = \text{máx}(X_1, X_2)$. ¿Cuál de las dos debiera ser menor?

14. Tres integrantes de un equipo de salto juegan un campeonato. Se asigna al equipo la mejor de las tres distancias obtenidas.
El atleta A salta con distribución $\mathcal{U}[0,2]$.
El atleta B salta según una distribución cuya función de densidad es:
$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right) I_{[0,2]}(x).$$
El atleta C salta según una distribución cuya función de densidad es:
$$f(x) = \frac{x}{2} I_{[0,2]}(x).$$
a) Hallar la distribución de la distancia asignada al equipo.
b) Encontrar la probabilidad de que la distancia sea mayor que 1,2.

15. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v. a. independientes con distribuciones exponenciales de parámetros $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ respectivamente.
a) Mostrar que la distribución de $Y = \underset{1 \leq i \leq n}{\text{mín}} X_i$ es exponencial.
b) Probar que:
$$P\left(X_k = \underset{1 \leq i \leq n}{\text{mín}} X_i\right) = \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}.$$
Sugerencia: Ver que X_k y $\underset{i \neq k}{\text{mín}}\, X_i$ son independientes, y considerar el suceso $\left\{X_k \leq \underset{i \neq k}{\text{mín}}\, X_i\right\}$.