En cada ejercicio definir las variables aleatorias involucradas y cuando sea posible identifique su distribución.

1. La fracción de alcohol X en cierto compuesto puede considerarse una v.a., donde X tiene función de densidad
$$f_X(x) = c(1-x)\, I_{[0,1]}\,(x)\,.$$
   a) Determinar c.
   b) Supóngase que el precio de venta del compuesto depende del contenido de alcohol: si $x < \frac{1}{3}$, el precio es \$ 1, si $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$, el precio es \$ 2 y si $x > \frac{2}{3}$ entonces es de \$ 3. Hallar la distribución del precio de venta del producto.

2. El diámetro D (expresado en dm.) del tronco de cierta especie de árboles es una v.a. con función de densidad:
$$f_D(x) = k\, x\, I_{(0,10)}\,(x)$$
   a) Hallar el valor de la constante k.
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que el diámetro de un árbol de esa especie elegido al azar mida entre 4 y 6 dm?
   c) Ídem **??**) sabiendo que el diámetro mide más de 5 dm.
   d) En un área del bosque hay 3 árboles de esa especie. Calcular la probabilidad de que exactamente 2 de ellos tengan diámetro entre 4 y 6 dm.
   e) ¿Cuántos árboles habría que muestrear en el bosque para que la probabilidad de encontrar al menos uno cuyo diámetro mida entre 4 y 6 dm. sea $\geq 0{,}99$?

3. El colectivo que toma Felipe para ir al trabajo llega a la parada en algún momento entre las 10 y las 10:30 con distribución uniforme. El llega a la parada a las 10 de la mañana,
   a) ¿cuál es la probabilidad de que tenga que esperar más de 10 minutos?
   b) Si el colectivo no llegó a las 10:15, encontrar la probabilidad de que tenga que esperar por lo menos otros 10 minutos más.

4. Se dice que una v.a. X tiene distribución simétrica respecto de θ sii:
$$P(X \leq \theta - h) = P(X \geq \theta + h) \qquad \forall h > 0$$
   a) Dar dos ejemplos de v.a. con distribución simétrica, una discreta y otra continua.
   b) Sea X v.a. continua. Probar que son equivalentes:
      i. X tiene distribución simétrica respecto de θ.
      ii. $P(X \leq x) = P(X \geq 2\theta - x)$
      iii. $F_X(x) = 1 - F_X(2\theta - x)$
      iv. $f_X(x) = f_X(2\theta - x)$
      v. $f_X(\theta - x) = f_X(\theta + x)$

5. a) Sea X una v.a. con distribución $\mathcal{N}(0,1)$, es decir, normal estándar. Calcular usando la tabla:
      i. $P(X \leq 1{,}2)$
      ii. $P(-0{,}5 \leq X \leq 1{,}2)$
   b) Sea Y una v.a. con distribución $\mathcal{N}(2{,}5, 0{,}16)$. Calcular usando la tabla:
      i. $P(1{,}8 \leq Y \leq 3{,}5)$.
      ii. $P(Y > 3{,}2)$.
      iii. $P(Y^2 \leq 4)$.

6. En una cierta población humana, el índice cefálico I (anchura del cráneo expresada como porcentaje de la longitud) se distribuye normalmente entre los individuos. Hay un 58 % con $I \leq 75$, un 38 % con $75 \leq I \leq 80$ y un 4 % con $I > 80$. Hallar la función de densidad del índice y la $P(78 \leq I \leq 82)$.

7. Supongamos que el tiempo de respuesta medida en segundos de una terminal conectada en línea es una v.a. X con distribución exponencial con parámetro 1/5.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de respuesta sea mayor de 5 segundos?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de respuesta esté entre 5 y 10 segundos?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de respuesta esea mayor a 10 segundos, sabiendo que fue mayor a 5 segundos?
   d) (Propiedad de Falta de Memoria): Sea X $E(\lambda)$ y sean s y t números reales positivos cualesquiera,
$$P(X > s + t | X > s) = P(X > t).$$