Probabilidad condicional

1. Hay 3 cajas A, B y C con 20 piezas cada una, conteniendo 20, 15 y 10 piezas buenas. La probabilidad de elegir la caja A es igual a la de B, y la de C es igual a su suma. Eligiendo al azar una caja se sacan de ella con reposición 2 piezas que resultan ser buenas. Hallar la probabilidad condicional de que provengan de la caja A.

2. De un bolillero que contiene 5 bolillas numeradas 1, 2, 3, 4, 5 se extrae una al azar; sea la número k. Se hace una segunda extracción al azar entre las bolillas de número menor o igual que k; sea la número j. Por último se hace una extracción al azar entre las bolillas de número menor o igual que j.

   a) Describir el espacio muestral para este experimento y determinar el número de sus elementos.

   b) ¿Es razonable pedir equiprobabilidad en este espacio? ¿Qué probabilidad le asignaría al $(1, 1, 1)$?

   c) ¿Qué probabilidad le asignaría al $(4, 3, 1)$?

   d) Calcular la probabilidad de sacar un 5 en la primera prueba dado que se obtuvo 1 en la segunda.

3. Se dispone de dos urnas cuyo contenido es el siguiente.

   Urna A: 5 bolitas rojas y 3 blancas
   Urna B: 1 bolita roja y 2 blancas

   Se arroja un dado equilibrado. Si el resultado es 3 ó 6, se extrae una bolita de la urna A que se coloca en la urna B y luego se extrae una bolita de B. En caso contrario, el proceso se hace a la inversa.

   a) Hallar la probabilidad de que ambas bolitas sean rojas.

   b) Si ambas bolitas son del mismo color, ¿cuál es la probabilidad de que sean blancas?

4. Cuando se realiza un análisis de laboratorio para diagnosticar una cierta enfermedad en un paciente se está frente a la posibilidad de cometer dos tipos de errores en el diagnóstico. Sean E el evento "la persona examinada está enferma" y A el evento "el resultado del análisis es positivo, es decir que el análisis concluye que la persona examinada contrajo la enfermedad". Por supuesto, ambos eventos no tienen por qué coincidir (aunque eso sería lo deseable). Cuando no lo hacen, hay un error de diagnóstico: si el análisis da positivo pero el paciente está sano se dice que tenemos un falso positivo, si en cambio el análisis da negativo pero el paciente está enfermo se dice que tenemos un falso negativo. Para cada análisis se conocen la sensibilidad del test, es decir, la $P(A|E)$ y la especificidad del test, es decir, $P(A^c|E^c)$.

   a) Supongamos que una prueba de laboratorio en particular es tal que

   $$P(A|E) = P(A^c|E^c) = 0{,}95.$$

   y que la probabilidad de que un paciente que se examina padezca la enfermedad es 0,005 (prevalencia de la enfermedad). ¿Cuál es la probabilidad de que una persona cuyo análisis diagnóstico es positivo en realidad esté enferma?

   b) Sean ahora

   $$P(A|E) = P(A^c|E^c) = p \qquad\qquad P(E) = 0{,}005.$$

   ¿Para qué valor de p es $P(E|A) = 0{,}95$? Interpretar la respuesta.

5. *a*) Un dado se tira tantas veces como sea necesario para que aparezca un as. Suponiendo que el as no aparece en el primer tiro, ¿cuál es la probabilidad de que sean necesarios más de 3 tiros?

   b) Supongamos que el número de tiros sea par, ¿ cuál es la probabilidad de que sea 2?

6. Se tienen $n + 1$ urnas numeradas $0, 1, \ldots, n$. La urna i tiene i bolillas blancas y $n - i$ negras. Se elige al azar una urna,

   a) y se extrae de ella una bolilla al azar,

      i. hallar la probabilidad de que la bolilla extraída sea blanca.

      ii. Si la bolilla extraída fue blanca, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la urna i, $0 \leq i \leq n$?

   b) y se realizan k extracciones con reposición de la urna elegida,

      i. hallar la probabilidad de que las k bolillas extraídas sean blancas.

      ii. Sabiendo que las k bolillas extraídas son blancas, si se realiza una nueva extracción de esa misma urna, ¿cuál es la probabilidad de que esta última bolilla sea blanca?

7. Un modelo simplificado del pronóstico del tiempo

Supongamos que el tiempo (seco o lluvioso) de mañana tendrá probabilidad p de ser el mismo que el de hoy.

  a) Si el día 1^0 de enero fue lluvioso, mostrar que $p_n =$ probabilidad de que el día (n+1)-ésimo de ese año sea lluvioso satisface
$$\begin{cases} p_n &= (2p-1)p_{n-1} + (1-p) \quad n \geq 1 \\ p_0 &= 1 \end{cases}$$
  b) Probar que
$$p_n = \frac{1}{2}[1 + (2p-1)^n] \quad n \geq 0$$

Independencia

8. Se extrae al azar una bolilla de una urna que tiene 9 bolillas de las cuales 3 son blancas, 3 son negras y 3 son rojas, numeradas 1, 2, 3 en cada color. Además las siguientes bolillas son rayadas: $n°$ 1 blanca, $n°$ 2 negra y $n°$ 3 roja.
Sean los sucesos:
A: “la bolilla es número 1”
B: “la bolilla es blanca”
C: “la bolilla es rayada”

  a) ¿Son los sucesos A, B, y C independientes de a pares?
  b) ¿Son independientes los sucesos A, B y C?

9. Sean a, b y c tres jugadores que juegan por turnos a un juego que nunca se empata de acuerdo con la siguiente regla: Empiezan a y b. El perdedor es reemplazado por c. El juego continua de esta manera (el ganador juega con el que estaba afuera) hasta que un jugador gane 2 veces consecutivas convirtiéndose en el ganador del juego.

  a) Escribir un espacio muestral.
  b) Supongamos que en cada partido cada uno de los 2 jugadores tiene probabilidad $\frac{1}{2}$ de ganar.
     i. Calcular $P(a \quad a)$ y $P(a \quad c \quad b \quad a \quad c \quad b \quad b)$.
     ii. Sea B_i el evento .el jugador a gana el partido i-ésimo”. Hallar $P(B_1)$, $P(B_2)$ y $P(B_1 \cap B_2)$. ¿Son independientes los eventos B_1 y B_2?
     iii. Sea A_4 el evento el juego termina en el cuarto encuentro. Calcular $P(A_4)$.
     iv. Sea $w = (a \quad c \quad b \quad a \quad c \quad b \quad a \quad c \quad b \quad \ldots \quad)$. Calcular $P(w)$.
     v. Mostrar que la probabilidad de que a gane es $5/14$ y calcular la de los otros dos. Verificar que las probabilidades de ganar no son iguales para los tres jugadores (de paso, ¿conviene o no jugar el primer partido?)

10. a) Probar que el evento A es independiente de cualquier evento B si y sólo si $P(A) = 1$ ó 0.
  b) Si $A \subset B$ y A y B son independientes entonces $P(A) = 0$ ó $P(B) = 1$.
  c) Probar que si $B_i = A_i$ o $B_i = A_i^c$, siendo A_i independientes, $1 \leq i \leq n$ entonces
$$P\left(\bigcap_{i=1}^{m} B_i\right) = \prod_{i=1}^{m} P(B_i), \quad \forall \quad 1 \leq m \leq n$$
  con lo cual $B_1 \ldots B_m$ son independientes, $\forall \quad 1 \leq m \leq n$.
  Sugerencia: Hacer inducción en el número de complementos de A_i involucrados.

11. Sean $S_1 \ldots S_n$ eventos independientes en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Describir mediante uniones y/o intersecciones de ellos y hallar la probabilidad de que de los S_i ocurra:

  a) al menos uno.
  b) exactamente uno.
  c) ninguno.
  d) exactamente k en el caso $P(S_i) = p, \qquad 1 \leq i \leq n$.

12. a) De un bolillero que contiene n bolillas numeradas $1, 2, \ldots, n$ se extrae una al azar. Sea p un número primo y A_p el evento: “el número de la bolilla elegida es divisible por p”. Probar que si $p_1, p_2, \ldots$ son distintos divisores primos de n entonces los eventos $A_{p_1}, A_{p_2}, \ldots$ son independientes.
  b) Sea $\varphi(n)$ la función de Euler de la teoría de números, es decir $\varphi(n)$ es el número de enteros coprimos con n y menores o iguales que n. Demostrar que
$$\varphi(n) = n \prod_{p \text{ primos: } p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$