Axiomas de probabilidad.

1. Dar un espacio muestral adecuado para cada uno de los siguientes experimentos:

   a) Se arroja un dado dos veces.

   b) Se arroja un dado hasta que aparece el primer as.

   c) De una caja que contiene 5 bolillas numeradas del 1 al 5, se extraen dos bolillas de dos maneras distintas: (i) con reposición y (ii) sin reposición.

   d) Se elige al azar un punto en el círculo unitario.

2. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ una sucesión de eventos en $\mathcal{F}$. Mostrar que

   a) $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (σ-subaditividad).

   b) Si $P(A_i) = 0, \forall i$ entonces $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = 0$.

   c) Si $P(A_i) = 1, \forall i$ entonces $P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = 1$.

   d) Si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de eventos, es decir, $A_i \subseteq A_{i+1}$ $\forall i$, entonces $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} P(A_i)$.

   e) Si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de eventos, es decir, $A_{i+1} \subseteq A_i$ $\forall i$, entonces $P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} P(A_i)$.

   f) $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P(A_i^c)$.

3. Sean $A_1, ..., A_n$ eventos en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Supongamos que para cada $1 \leq k \leq n$ definimos

   $$I_k = \{\text{Los subconjuntos del conjunto}\{1, 2 \ldots n\} \text{ de tamaño } k\}.$$

   Por ejemplo, si $n = 4$ y $k = 3$ resulta que

   $$I_3 = \{\{2,1,3\},\ \{4,2,1\},\ \{1,3,4\},\ \{4,2,3\}\}.$$

   Fijado n, resulta que $w \in I_k$ si y solo si $w = \{i_1,\ i_2 \ldots i_k\}$ con $1 \leq i_1 < i_2 \ldots < i_k \leq n$. Luego, haciendo un pequeño abuso de notación al identificar subconjuntos con $k-$ uplas, podemos escribir

   $$I_k = \{(i_1, i_2 \ldots, i_k) \text{ tales que } i_j \in \mathbb{N} \text{ y } 1 \leq i_1 < i_2 \ldots < i_k \leq n\}.$$

   Por ejemplo, si $n = 4$ y $k = 3$ resulta que

   $$I_3 = \{(1,2,3),\ (1,2,4),\ (1,3,4),\ (2,3,4)\}.$$

   a) Probar por inducción en n la siguiente fórmula

   $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{(i_1, i_2 \ldots, i_k)\in I_k} (-1)^{k+1} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k})$$

   b) ¿Cómo queda la fórmula anterior si los eventos cumplen $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = b_k$ para todo $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$? (Debería obtenerse una expresión con una sola sumatoria).

4. Sea Ω un espacio numerable, $\Omega = \{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Sea $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales, $p_n \geq 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$. Probar que $P : \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definida por $P(A) = \sum_{v_n\in A} p_n$, resulta una probabilidad bien definida en $(\Omega, \mathcal{F})$.

Cálculo de probabilidades.

5. Se arroja dos veces un dado equilibrado. Sean los eventos:

   $A = \{\text{La suma de los resultados es par}\}$

   $B = \{\text{La suma de los resultados es 8}\}$

   $C = \{\text{Ambos resultados son distintos}\}$

   Explicitar el espacio muestral y calcular las probabilidades de A, B, C, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap C$, $A - C$.
   ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los resultados sea mayor o igual a 10?

6. Un bolillero contiene N bolillas numeradas 1, 2,..., N. Se sacan una a una n bolillas $1 \leq n \leq N$, sin devolver al bolillero cada bolilla obtenida. Sean m y k enteros tales que $1 \leq m \leq N$ y $1 \leq k \leq n$. Hallar la probabilidad de que

   a) se extraiga la bolilla m en la k-ésima extracción.

   b) se extraiga la bolilla m.

   c) el máximo número obtenido sea $\leq m$.

   d) el máximo número obtenido sea m.

   e) los números de las bolillas extraídas en el orden en que fueron extraídas constituyan una sucesión estrictamente monótona.

   f) Resolver los items anteriores en el caso en que cada bolilla obtenida sea devuelta al bolillero.

7. De un bolillero que contiene B bolillas blancas y N negras se extraen sucesivamente y sin reemplazo n bolillas, $1 \leq n \leq B+N$. Hallar la probabilidad p_k de obtener exactamente k bolillas blancas ($0 \leq k \leq \min\{n, B\}$). Probar que si B y N tienden a infinito de modo que $p = \frac{B}{B+N}$ permanezca constante, entonces

$$p_k \underset{N,B \to +\infty}{\longrightarrow} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

8.
   a) Si se colocan 4 bolillas indistinguibles en 4 cajas numeradas ¿cuál es la probabilidad de que la primera urna contenga
      i. exactamente una bolilla?
      ii. exactamente dos bolillas?
      iii. al menos una?
   b) Resolver el item a) suponiendo que las bolillas son distinguibles.

9. Se colocan 6 bolillas indistinguibles en 4 celdas numeradas. ¿Cuál es la probabilidad de que
   a) todas las celdas estén ocupadas?
   b) al menos 3 celdas estén ocupadas?
   c) Resolver los items anteriores suponiendo ahora que las bolillas son distinguibles. Si no sale, el próximo ejercicio puede ser de ayuda.

10. Se reparten N bolillas distinguibles en n urnas distinguibles de tal modo que cada bolilla tiene la misma probabilidad de llegar a una urna cualquiera sea ésta (o sea, según la estadística de Maxwell-Boltzman). Sea A_i el suceso: “la i-ésima urna no está vacía”.
   a) Mostrar que
   $$V_k = P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \left(1 - \frac{j}{n}\right)^N, \qquad k \leq n$$
   Observar que dicha probabilidad no depende de los índices $i_1, \ldots i_k$ elegidos.
   b) Si $\frac{N}{n} = \lambda$ constante entonces $\lim_{n,N \to \infty} V_k = \left(1 - e^{-\lambda}\right)^k$.

11. Consideremos el caso que hemos tomado una muestra aleatoria con reposición de tamaño r de una población de n elementos $a_1, \ldots, a_n$ (supongamos equiprobabilidad en dicho espacio). Sea A el evento “en la muestra obtenida $a_{j_1}, \ldots, a_{j_r}$ no hay elementos repetidos”.
   a) Hallar $P(A)$.
   b) Los cumpleaños de r personas forman una muestra de tamaño r de la población de todos los días del año. Si bien los años no son todos iguales en longitud, y sabemos que los porcentajes de nacimientos no son constantes a través del año, como una primera aproximación podemos considerar que una elección al azar de personas sea equivalente a realizar una selección al azar de las fechas de nacimientos y considerar que el año es de 365 días. Hallar la probabilidad de que entre r personas elegidas al azar todas tengan distintas fechas de cumpleaños. El resultado numérico es sorprendente. Por ejemplo para $r = 23$ tenemos que $p < \frac{1}{2}$, o sea que entre 23 personas, la probabilidad de que al menos 2 cumplan años el mismo día es $> \frac{1}{2}$ (para $r = 30$, $p = 0{,}294$).
   c) Hallar la probabilidad de que si n bolillas distintas se distribuyen al azar en n cajas, estén todas las cajas ocupadas.
   (Para $n = 7$, p ya es $0{,}00612\ldots$; para $n = 6$, $p = 0{,}01543\ldots$)
   (Es muy improbable que en 6 tiradas de un dado salgan todos los números).
   d) Repetir el ítem anterior usando el ejercicio 10, y deducir la siguiente identidad
   $$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j (n-j)^n = n!$$

12. Se tienen N bolillas numeradas $1, 2, \ldots, N$ y N cajas numeradas. Se colocan al azar una bolilla en cada caja. Si coincide el número de la bolilla con el de la caja se dice que se produjo un apareamiento.
   a) Hallar la probabilidad de que ocurra por lo menos un apareamiento.
   b) Probar que el límite de dicha probabilidad cuando $N \to \infty$ es $1 - e^{-1}$.
   c) n parejas casadas se han reunido a bailar. Cada caballero tiene la misma probabilidad de bailar con cualquier dama. ¿Cuál es la probabilidad de que ningún caballero baile con su propia mujer?
   d) Sea $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n > 1$. Hallar el número de biyecciones de I_n en I_n con al menos un punto fijo.