1. Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y X v.a. discretas a valores en $\mathbb{N}\cup\{0\}$. Entonces $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} p_n(k) = p(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$.

2. Sean $X_1,\ldots,X_n$ variables aleatorias i.i.d. $X_n \sim \mathcal{U}[0,1]$. Sean

$$\begin{array}{ll} Y_n = \min(X_1,\ldots,X_n) & Z_n = \max(X_1,\ldots,X_n) \\ U_n = nY_n & V_n = n(1-Z_n). \end{array}$$

Probar que:

 a) $Y_n \xrightarrow{P} 0$, $Z_n \xrightarrow{P} 1$.
 b) $U_n \xrightarrow{\mathcal{D}} W$, $V_n \xrightarrow{\mathcal{D}} W$ donde $W \sim \varepsilon(1)$.

3. Sean $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ y $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ sucesiones tales que $\lim_{n\to+\infty}\mu_n = \mu$ y $\lim_{n\to+\infty}\sigma_n = \sigma$.

 a) Si $\mu = \infty$ o si $\sigma = +\infty$, probar que X_n no converge en distribución.
 b) Si μ es finito y $\sigma > 0$, probar que si $X_n \sim \mathrm{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \sim N(\mu, \sigma^2)$.
 c) Si μ es finito y $\sigma = 0$, ¿adónde converge X_n en distribución?

4. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias tal que $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \sim N(0,1)$. Sea $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ otra sucesión dada por $Y_n = -X_n$. Ver que $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \sim N(0,1)$, y que sin embargo, $X_n + Y_n \overset{\mathcal{D}}{\nrightarrow} X + X \sim N(0,4)$.[1]

5. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea Z_n una variable aleatoria discreta con probabilidad puntual dada por

$$P\left(Z_n = \frac{i}{n}\right) = \frac{1}{n} \qquad \text{para } i = 1,\ldots,n.$$

Hallar el límite en distribución de la sucesión $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ¿Se trata de alguna distribución conocida?[2]

6. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de variables aleatorias independientes con distribución Bernoulli de parámetro $\frac{1}{2}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la variable aleatoria

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{2^k}.$$

 a) Hallar el límite en distribución de la sucesión $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
 b) Hallar la distribución de la variable aleatoria $Z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{2^k}$.

7. Hallar la función característica de X cuando X tiene distribución:

 a) $\mathcal{P}(\lambda)$
 b) $\mathcal{B}i(n,p)$
 c) $\varepsilon(\lambda)$
 d) $\mathcal{U}(a,b)$

8. Probar usando funciones características que si X e Y son independientes entonces

 a) $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1), Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2) \Rightarrow X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
 b) $X \sim \mathcal{B}i(n,p), Y \sim \mathcal{B}i(m,p) \Rightarrow X + Y \sim \mathcal{B}i(n+m,p)$.
 c) Hallar la función característica de $\Gamma(n,\lambda)$ para $n \in \mathbb{N}$, y de una χ_n^2.
 d) Calcular para las variables anteriormente nombradas los primeros cuatro momentos, es decir, las $E\left(X^k\right)$ con $k = 1,\ldots,4$.

9. Probar que una v.a. X tiene distribución simétrica respecto a 0 si y sólo si $\phi_X(t)$ es real para todo $t \in \mathbb{R}$.

10. Mostrar que si $X_1,\ldots,X_n$ son independientes y simétricas respecto de 0, entonces $\sum_{j=1}^{n} a_j X_j$ también tiene distribución simétrica respecto de 0.

[1]La idea de este ejercicio es ver que no es cierto en general que $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ e $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$, implique que $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X + Y$. La convergencia en distribución establece una condición sólo sobre las *funciones de distribución* de las variables involucradas, no hace referencia al *espacio muestral* en el que pudieran estar definidas ni da información sobre la dependencia o independencia de las variables involucradas.

[2]Observar que una sucesión de variables aleatorias discretas puede converger en distribución a una variable aleatoria continua.

11. *a*) Usando que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+x^2}\,dx = \pi e^{-|t|}$$

hallar la función característica de una v.a. Cauchy.

b) Sea X una v.a. con distribución Cauchy,.verificar que $\phi_{2X} = \phi_X^2$ con lo cual ϕ_{X+Y} puede coincidir con $\phi_X \cdot \phi_Y$, aunque X e Y no sean independientes.

c) Hallar la distribución de $\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ con X_i i.i.d. Cauchy.

12. *a*) Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ variables aleatorias i.i.d. tales que $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}$ y definamos $Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{2^k}$.

Probar que $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{U}[-1,1]$.

Sugerencia: Usar el ejercicio 1 y la siguiente propiedad: $\cos(\theta) = \dfrac{\sin(2\theta)}{2\sin(\theta)}$.

b) Sea $(W_n)_{n\geq 1}$ variables aleatorias i.i.d. tales que $P(W_n = 1) = P(W_n = 0) = \frac{1}{2}$ y definamos $Z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{W_k}{2^k}$.

Hallar la distribución límite de la sucesión Z_n. Notar que si se elige un número al azar $\omega \in (0,1)$ $Z_n(\omega)$ resulta el desarrollo binario (en base dos) de ω hasta su n-ésimo dígito decimal y W_k es el $k-$ésimo dígito binario. Interpretar en estos términos la distribución hallada.

13. Sean $X_1, \ldots, X_{100}$ v.a. i.i.d. con densidad:

$$f_X(x) = \frac{2}{x^3} I_{(1,\infty)}(x).$$

Calcular aproximadamente $P\left(\prod_{i=1}^{100} X_i > e^{75}\right)$.

14. Se arroja una moneda, si sale cara se tira 3 veces un dado, si sale ceca se tira 5 veces. Se repite el juego 30 veces. Calcular aproximadamente la probabilidad de obtener más de 22 ases.

15. Una fábrica tiene rollos de tela puestos en venta. Se sabe que los metros de tela de una tercera parte de ellos tienen una distribución $\mathcal{U}[10,30]$ y el número de metros de tela de los rollos restantes tienen una distribución $\mathcal{U}[20,30]$. Una tienda compró 30 rollos de tela.

a) Calcular la probabilidad de que un rollo elegido al azar contenga más de 20 metros de tela.

b) Calcular la probabilidad de que la tienda haya comprado por lo menos 650 metros de tela.

c) Calcular cuántos rollos debería comprar la tienda para que la probabilidad de adquirir por lo menos 800 metros de tela sea 0.95.

16. En una tabaquería, la demanda de cajas de habanos es $\mathcal{P}(2)$. Cada mañana el dueño completa su stock de manera de tener 2 cajas. Cada caja le deja una ganancia de \$20. Cuando reúna la suma de \$1200 se va de vacaciones al Sur. No trabaja los domingos y empieza a trabajar el día 10 de noviembre.

a) Calcular la probabilidad de que pueda irse de vacaciones el día 22 de diciembre por la mañana.

b) Calcular una fecha f_0 tal que la probabilidad que pueda partir en f_0 sea aproximadamente 0,95.

17. Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. tales que $\sqrt{n}(X_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathrm{N}(0,\sigma^2)$ y sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que g es derivable, g' es continua en μ, $g'(\mu) \neq 0$.

a) Probar que $X_n \xrightarrow{p} \mu$.

b) Mostrar que

$$\sqrt{n}[g(X_n) - g(\mu)] \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathrm{N}(0, \sigma^2[g\prime(\mu)]^2)$$

Sugerencia: Usar el desarrollo de Taylor de la función g del orden adecuado.

c) ¿Cuál será la distribución de $n[g(X_n) - g(\mu)]$ cuando $n \to \infty$ si $g'(\mu) = 0$ pero $g''(\mu) \neq 0$?
Sugerencia: Usar el desarrollo de Taylor de la función g del orden adecuado.

18. Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. i.i.d., $X_n \sim \mathcal{U}[0,\theta]$, $\theta > 0$. Probar que

$$\sqrt{n}[\ln(2\overline{X}_n) - \ln(\theta)] \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathrm{N}(0, \frac{1}{3})$$

donde $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

19. Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. i.i.d. tales que $E(X_1) = 0$, $E(X_1^2) = 2$ y $E(X_1^4) < \infty$. Hallar el límite en distribución de las siguientes variables aleatorias, aclarando las herramientas teóricas utilizadas en cada caso.

   a) $Y_n = \left(\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) / \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2$

   b) $Z_n = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) / \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2}$

   c) $W_n = n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2$.

20. Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. i.i.d. $X_n \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Hallar la distribución límite de $\sqrt{n}(\overline{X}^2 - \lambda^2)$.