

Análisis II - Análisis matemático II - Matemática 3 2do. cuatrimestre de 2012

Práctica 2 - El teorema de Green

1. Verificar el Teorema de Green para el disco D con centro $(0, 0)$ y radio R y las siguientes funciones:
 - a) $P(x, y) = xy^2, Q(x, y) = -yx^2$
 - b) $P(x, y) = 2y, Q(x, y) = x$.
2. Verificar el Teorema de Green y calcular $\int_C y^2 dx + x dy$, siendo C la curva recorrida en sentido positivo:
 - a) Cuadrado con vértices $(0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2)$
 - b) Elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
 - c) $C = C_1 \cup C_2$, donde $C_1 : y = x, x \in [0, 1]$, y $C_2 : y = x^2, x \in [0, 1]$.

3. Usando el teorema de Green, hallar el área de:

- a) El disco D con centro $(0, 0)$ y radio R
- b) La región dentro de la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

4. Sea D la región encerrada por el eje x y el arco de cicloide: $x = \theta - \operatorname{sen} \theta, y = 1 - \cos \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Usando el teorema de Green, calcular el área de D .

5. Hallar el área entre las curvas dadas en polares por

$$r(\theta) = 1 + \cos \theta \text{ con } -\pi \leq \theta \leq \pi,$$
$$r(\theta) = \sqrt{\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta} \text{ con } -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}.$$

6. Probar la fórmula de integración por partes: Si $D \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio elemental, ∂D su frontera orientada en sentido antihorario y $n = (n_1, n_2)$ la normal exterior a D , entonces

$$\int_D uv_x dx dy = - \int_D u_x v dx dy + \int_{\partial D} u v n_1 ds,$$

para todo par de funciones $u, v \in C(\bar{D}) \cap C^1(D)$.

7. Sean P y Q funciones continuamente diferenciables en \mathbb{R}^2 . Verificar que el Teorema de Green para estas funciones es válido cuando la región D es el anillo $D = \{(x, y) / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Sugerencia: Aplicar el Teorema de Green en los discos de radios 1 y 2.

8. Sea C la curva dada por los siguientes trozos

$$\begin{array}{ll} x = 0 & 0 \leq y \leq 4 \\ y = 4 & 0 \leq x \leq 4 \\ y = x & 0 \leq x \leq 1 \\ y = 2 - x & 1 \leq x \leq 2 \\ y = x - 2 & 2 \leq x \leq 3 \\ y = 4 - x & 2 \leq x \leq 3 \\ y = x & 2 \leq x \leq 4 \end{array}$$

orientada positivamente. Calcular

$$\int_C \frac{y}{(x-1)^2 + y^2} dx + \frac{1-x}{(x-1)^2 + y^2} dy$$

9. Sea $D = \{(x, y) / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$. Calcular

$$\int_{\partial D} x^2 y dx - xy^2 dy$$

10. Calcular el trabajo efectuado por el campo de fuerzas $F(x, y) = (y + 3x, 2y - x)$ al mover una partícula rodeando una vez la elipse de ecuación $4x^2 + y^2 = 4$ en el sentido de las agujas del reloj.
11. Sea $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = (\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2})$. Calcular $\int_C F \cdot ds$ donde C es la circunferencia unitaria centrada en el origen orientada positivamente. Calcular $Q_x - P_y$. ¿Se satisface en este caso el Teorema de Green?
12. Calcular $\int_C f_1 dx + f_2 dy$ siendo

$$f_1 = \frac{x \operatorname{sen} \frac{\pi}{2(x^2+y^2)} - y(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f_2 = \frac{y \operatorname{sen} \frac{\pi}{2(x^2+y^2)} + x(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$C = \begin{cases} y = x + 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ y = 1 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

recorrida del $(-1, 0)$ al $(1, 0)$.

13. Determinar todas las circunferencias C en el plano \mathbb{R}^2 sobre las cuales vale la siguiente igualdad

$$\int_C -y^2 dx + 3xy dy = 6\pi.$$

14. Calcular la integral $\int_C F \cdot ds$ donde $F(x, y) = (y^2 e^x + \cos x + (x - y)^2, 2ye^x + \operatorname{sen} y)$, y C es la curva dada por $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$, orientada de manera tal que comience en $(1, 0)$ y termine en $(-1, 0)$.
15. Sean $u, v \in C^1(D)$ donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^4}{4} \leq 1\}$. Consideremos los campos definidos por $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y)), G(x, y) = (v_x - v_y, u_x - u_y)$. Calcular

$$\int \int_D (F \cdot G)(x, y) dx dy$$

sabiendo que sobre el borde de D se tiene $u(x, y) = x; v(x, y) = 1$.