

Práctica 7

1. Calcular

a) $\int_0^\pi \frac{\cos(2\theta)}{1 - 2a \cos \theta + a^2} d\theta, \quad a^2 < 1$

b) $\int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2}, \quad a > 1$

2. Probar que

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

b) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

3. Calcular

a) $\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx$

b) $\int_0^\infty \frac{\cos x - 1}{x^2} dx$

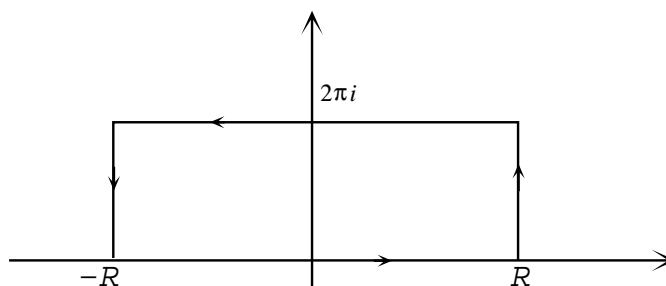
4. Calcular el valor principal de:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^3 - 4x^2 + 5x}$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{(x^2 + 4)(x - 1)} dx$

5. Calcular $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} dx$ considerando la función $\frac{1 - e^{2iz}}{z^2}$ y aplicando el teorema de los residuos sobre un recinto apropiado.

6. Verificar que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(a\pi)}, \quad 0 < a < 1$, integrando la función $\frac{e^{az}}{1 + e^z}$ en:



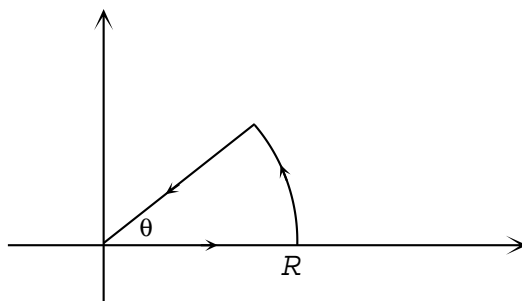
7. Sean: $I_1 = \int_0^\infty x^a \cos x \, dx$, $I_2 = \int_0^\infty x^a \operatorname{sen} x \, dx$, $-1 < a < 0$. Demostrar, integrando sobre un contorno adecuado la función $z^a e^{iz}$, que $I_1 = -I_2 \operatorname{tg}(\frac{a}{2})$.

8. Usando que $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$, calcular

a) las integrales de Fresnel

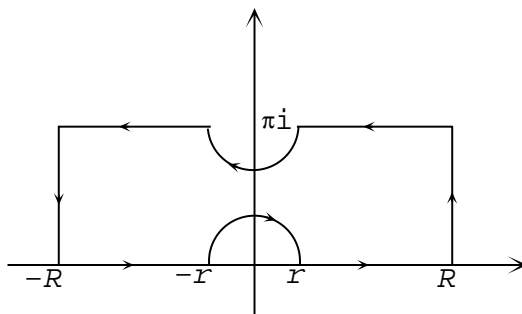
$$\int_0^\infty \cos(x^2) \, dx \quad \int_0^\infty \operatorname{sen}(x^2) \, dx$$

integrando la función e^{iz^2} en el recinto ($\theta = \frac{\pi}{4}$)



b) $\int_{-\infty}^\infty e^{-\lambda x^2} \cos(2\lambda\theta x) \, dx$, $\lambda, \theta > 0$; integrando la función $e^{-\lambda z^2}$ sobre un rectángulo de lados $\pm R$ y $\pm R + i\theta$.

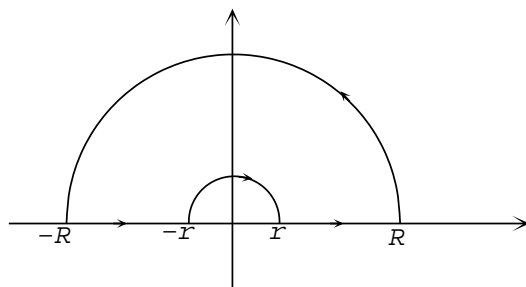
9. Calcular $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sh} x} \, dx$ integrando $\frac{e^{iz}}{\operatorname{sh} z}$ en el recinto:



10. a) Dado $a \in \mathbb{R}_{\neq 0}$, calcular las integrales:

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 + a^2} \, dx \quad \text{y} \quad \int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{x^2 + a^2} \, dx$$

integrando (respectivamente) las funciones $\frac{\log z}{z^2 + a^2}$ y $\frac{(\log z)^2}{z^2 + a^2}$ sobre el contorno



b) Verificar que

i) $\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2 + 1} dx = 0$

ii) $\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2 - 1} dx = \frac{\pi^2}{4}$

11. Calcular

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(1+x)(2+x)} dx$$

12. Probar que

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$