Práctica 10

1. **Ecuación de Euler**: $a_n x^n y^{(n)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = 0$, $a_i \in \mathbb{R}$

   a) Mostar que el cambio de variable $x = e^t$ transforma esta ecuación en una lineal a coeficientes constantes. ¿Dónde están definidas las soluciones de la ecuación transformada?

   b) Hallar la solución general de:
   - $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$
   - $x^3 y''' + 5x^2 y'' + 3xy' = 0$

2. **Ecuación de Legendre**

   a) Hallar mediante desarrollo en serie de potencias alrededor de $z = 0$, todas las soluciones de:
   $$(1 - z^2)w'' - 2zw' + a(a + 1)w = 0$$
   Mostrar que si $a \in \mathbb{N}$, la ecuación admite por solución un polinomio P_n tal que $P_n(1) = 1$.

   Nota: P_n es el $n-$ésimo polinomio de Legendre.

   b) Probar la fórmula de **Olinde Rodrigues**:
   $$P_n(z) = \frac{1}{2^n\, n!}\,\frac{d^n}{dz^n}\left[(z^2 - 1)^n\right]$$

3. **Ecuación de Hermite**: $w'' - 2zw' + 2aw = 0$

   a) Hallar todas las soluciones.

   b) Mostrar que si $a \in \mathbb{N}_0$, la ecuación admite un polinomio H_n como solución.

   c) Probar que $H_n(z) = (-1)^n\, e^{z^2}\, \dfrac{d^n}{dz^n}\left[e^{-z^2}\right]$ es la solución de la ecuación para $a = n$.

4. Hallar los puntos singulares de las siguientes ecuaciones y determinar cuáles de ellos son regulares en el sentido de Fuchs.

   a) $z^2 w'' + (z + z^2)w' - w = 0$

   b) $zw'' + 4w = 0$

   c) $z^2 w'' + 3z^2 w' - 5w = 0$

   d) $z^2 w'' + \operatorname{sen} z\, w' + \cos z\, w = 0$

5. **Ecuación de Laguerre:** $zw'' + (1 - z)w' + aw = 0$

a) Verificar que $z = 0$ es un punto singular regular de la ecuación y hallar una solución de la forma: $z^r \sum_{n \geq 1} a_n z^n$.

b) Mostrar que si $a \in \mathbb{N}$, la ecuación admite un polinomio L_n como solución.

c) Verificar que $L_n(z) = e^z \dfrac{d^n}{dz^n}[z^n e^{-z}]$, el $n-$ésimo polinomio de Laguerre, es solución de la ecuación si $a = n$.

6. **Ecuación de Bessel:** $z^2 w'' + zw' + (z^2 - \nu^2)w = 0$, $\nu \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \nu \geq 0$.

a) Mostrar que la ecuación tiene una solución de la forma: $z^\nu \sum_{n>0} a_n z^n$, $a_0 \neq 0$

Comprobar que tomando $a_0 = \dfrac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}$ se obtiene la solución:

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

llamada **función de Bessel de primera especie de orden ν.**

b) Mostrar que si $\nu \notin \mathbb{Z}$, la ecuación tiene una solución de la forma: $z^{-\nu} \sum_{n>0} a_n z^n$, $a_0 \neq 0$. Tomado $a_0 = \dfrac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu + 1)}$ se obtiene la solución

$$I_{-\nu}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(-\nu + k + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

c) Deducir que si $\nu \notin \mathbb{Z}$, la solución general de la ecuación es:

$$\omega(z) = A\, I_\nu(z) + B\, I_{-\nu}(z) \qquad A, B \in \mathbb{C}$$

d) Usando el método de Frobenius y eligiendo $a_0 = \dfrac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}$, mostrar que la solución general — para $\nu = 0$ — es:

$$\omega(z) = A\, I_0(z) + B \left[\log(z)\, I_0(z) + \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{(k!)^2} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \right]$$

Nota: si $\nu \in \mathbb{Z}$, la ecuación es del segundo tipo de Fuchs. Usando Frobenius se calcula una solución linealmente independiente con I_ν:

$$N_\nu(z) = (\log z)\, I_\nu(z) + z^{-\nu} P_\nu(z) + z^\nu f(z)$$

llamada **función de Neumann o de Bessel de segunda especie de orden** ν. P_ν es un polinomio tal que $P_\nu(0) \neq 0$ y f es una función entera. Por lo tanto, la solución general en este caso es:

$$\omega(z) = A\, I_\nu(z) + B\, N_\nu(z) \qquad A, B \in \mathbb{C}$$

7. Probar que $z\, I_1(z)$ es solución de la ecuación:

$$zw'' - w' + zw = 0$$

8. Mostrar que las ecuaciones de Legendre, Bessel, Hermite y Laguerre responden a un problema de Sturm-Liouville si $a = \nu = n$ y $z \in \mathbb{R}$.

9. **Ecuación de la difusión o del calor**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad a > 0, \quad t \geq 0$$

a) Resolver: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad 0 < x < 3 \qquad t \geq 0$

$u(0,t) = 0 \qquad u(3,t) = 0 \qquad u(x,0) = 25$

b) Sabiendo que la ecuación del calor en coordenadas polares para $n = 2$ es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad t \geq 0$$

resolver la ecuación con las condiciones:
$0 \leq r \leq 3$, $t \geq 0$, $u(3,t) = 0$, $u(r,0) = r$, $|u(r,t)| < M$, u no depende de θ.

10. **Ecuación de las cuerdas vibrantes o de las ondas**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad (a > 0)$$

a) Resolver la ecuación para $n = 1$, $0 < x < 5$
$u(0,t) = u(5,t) = 0 \qquad u(x,0) = x \qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$

b) Idem que **a)** con: $x > 0$, $t > 0$, $u(0,t) = 0$, $u(x,0) = x = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)$

c) Sabiendo que la ecuación de las ondas, para $n = 2$, en coordenadas polares es:

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right] - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

hallar una solución independiente de φ para $r \leq 4$ tal que $u(4,t) = 0$, $u(r,0) = 2$ y $\dfrac{\partial u}{\partial t}(r,0) = r$

11. **Ecuación de Laplace**

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

$\star$ Para $n = 2$,

a) Resolver la ecuación de Laplace en el ractángulo $0 \leq x, y \leq \pi$ con las siguientes condiciones: $u(x,0) = u(0,y) = u(\pi,y) = 0$, $u(x,\pi) = \operatorname{sen}(3x) + \operatorname{sen}(5x)$

b) Sabiendo que la ecuación en coordenadas polares es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

hallar la solución para $r \geq 2$ que verifica $\lim_{r\to\infty} u(r,\theta) = 0$ y $u(2,\theta) = \operatorname{sen}\theta$.

$\star$ Para $n = 3$,

c) Sabiendo que la ecuación en coordenadas cilíndricas es:

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right] + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

y suponiendo que u no depende de φ, hallar una solución para:
$z \geq 0$, $0 \leq r \leq 4$, $\lim_{z\to\infty} u(z,r) = 0$, $u(z,4) = 0$, $u(0,r) = r^2$, $|u(z,r)| < M$.

d) Sabiendo que la ecuación en coordenadas esféricas es:

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right] = 0$$

i) hallar u, independiente de φ, tal que sea acotada para: $0 \leq r \leq 2$ y $u(2,\theta) = 5$.

ii) hallar u, independiente de φ, acotada para $r \geq 5$ tal que $u(5,\theta) = 2\theta$ y $\lim_{r\to\infty} u(r,\theta) = 0$.