A) Tests de Neyman-Pearson para hipótesis simples.

1. Una empresa vende dos variedades de soja. La variedad 1 tiene un rendimiento por ha. que puede considerarse una variable aleatoria con distribución $N(37, 25)$, y la variedad 2 tiene un rendimiento por ha. que puede considerarse $N(40, 25)$. Un cliente realizó una compra de semillas de la variedad 2 y antes de continuar comprando a esta empresa, quiere asegurarse de que las semillas que le enviaron realmente pertenecen a esa variedad. Con ese fin, cultiva 10 parcelas de 1 ha. y obtiene los siguientes rendimientos:

$$37 \quad 39.5 \quad 41.7 \quad 42 \quad 40 \quad 41.25 \quad 43 \quad 44.05 \quad 38 \quad 38.5$$

   El cliente quiere que la probabilidad de seguir comprando a esta empresa cuando las semillas no son de la variedad pedida sea 0.05.

   (a) Plantear el test MP para este problema. ¿Qué decisión se toma?
   (b) Hallar el valor p. ¿Se hubiera rechazado H_0 para $\alpha = 0.01$?
   (c) Calcular la probabilidad del error de tipo II.
   (d) Determinar el número n de parcelas a cultivar para que el error de tipo II tenga probabilidad menor o igual que 0.05.

2. Consideremos dos funciones de probabilidad puntual $P_0(x)$ y $P_1(x)$ dadas por la siguiente tabla:

	x_1	x_2	x_3	x_4
P_0	0.05	0.00	0.05	0.90
P_1	0.00	0.05	0.90	0.05

   Se observa una v.a. X y se quiere testear $H_0 : X \sim P_0$ vs $H_1 : X \sim P_1$.

   (a) Encontar los 4 tests no aleatorizados de nivel $\alpha = 0.05$ para este problema.
   (b) Entre estos 4 tests de nivel α, ¿cuál es el mejor?
   (c) Probar que el test hallado en el inciso anterior es el más potente de nivel α.
   (d) ¿Hay algún test no aleatorizado de nivel menor que α? ¿Qué potencia tiene?
   (e) Encontrar el test más potente de nivel $\alpha = 0.10$.

3. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. que puede provenir de dos poblaciones: la hipótesis nula es que X_i tiene distribución $\mathcal{U}(0, 50)$ y la alternativa es que tiene densidad

$$f(x) = \frac{x}{1250} I_{[0,50]}(x).$$

   Encontrar el test MP para este problema.

   (*Sugerencia:* Analizar la distribución de $-\ln(X/50)$.)

4. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución $F(x, \theta)$ y sea $T(\mathbf{X})$ un estadístico suficiente para θ. Si $\Phi(\mathbf{X})$ es el test más potente de nivel α para

$$H : \theta = \theta_1 \qquad \text{vs} \qquad K : \theta = \theta_2$$

   mostrar que $\Phi(\mathbf{X})$ está basado en $T(\mathbf{X})$, o esa depende de la muestra solo a través de $T(\mathbf{X})$.

5. Sea $X \sim C(\theta, 1)$, mostrar que el test

$$\Phi(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 < X < 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es el mejor para su nivel para testear

$$H : \theta = 0 \qquad \text{vs} \qquad K : \theta = 1.$$

6. Sea Φ el mejor test de nivel α $(0 < \alpha < 1)$ para

$$H : \theta = \theta_0 \qquad \text{vs} \qquad K : \theta = \theta_1.$$

Mostrar que

$$E_{\theta_1}(\Phi(X)) = \beta_\Phi(\theta_1) > \alpha,$$

salvo que $P_{\theta_0} = P_{\theta_1}$.

B) Tests para familias con cociente de verosimilitud monótono.

1. Probar que las siguientes familias son de cociente de verosimilitud monótono:

   (a) $\mathcal{U}(\theta, \theta + 1)$

   (b) Las familias exponenciales a un parámetro con densidad o probabilidad

   $$p(x|\theta) = a(\theta)h(x)\exp(c(\theta)t(x))$$

   siempre que $c(\theta)$ sea estrictamente creciente. Luego las familias: binomial, binomial negativa, Poisson, Gamma, Beta y Normal (estas 3 ultimas considerando uno de los parámetros fijos) son de CVM.

   (c) $\mathcal{H}(n, m, M)$ donde m es el único parámetro desconocido, siendo

   $$P_X(x) = \frac{\binom{m}{x}\binom{M-m}{n-x}}{\binom{M}{n}}$$

   y $x = \max\{0, m + n - M\}, \ldots, \min\{m, n\}$

   (d) La familia doble exponencial

   $$f(x|\alpha, \beta) = \frac{1}{2\beta}\exp\left\{-\frac{|x-\alpha|}{\beta}\right\}$$

   con β desconocido.

   (e) La familia exponencial negativa

   $$f(x|\alpha) = \exp\{-(x-\alpha)\}\,\mathrm{I}_{(\alpha,\infty)}(x)$$

2. (a) Dada $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución $\mathcal{E}(\lambda)$, hallar el test UMP de nivel α para $H_0 : \lambda \geq \lambda_0$ vs $H_1 : \lambda < \lambda_0$.

   (b) Se sabe que el tiempo de duración de cierto tipo de lamparitas sigue una distribución $\mathcal{E}(\lambda)$. La empresa garantiza que el tiempo medio de vida es mayor que 50 días y quiere asegurarse que la producción satisface este requerimiento antes de sacarla a la venta. Para ello toma una muestra de 10 lamparitas y observa un tiempo promedio de duración de 41 días.

      i. Si se quiere tener un 95% de seguridad de no vender cuando no se satisfacen los requerimientos, ¿qué decisión se toma en base a estos datos?

      ii. Acotar el valor p.

      iii. ¿Cuál es la probabilidad de no sacar la producción a la venta si el tiempo medio de vida es de 57 días?

3. (a) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una población $N(\mu_0, \sigma^2)$ con μ_0 conocido. Encontrar el test UMP de nivel α para $H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ vs $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$.

   (b) Para medir la concentración de una sustancia en una solución se conoce un método cuyo error es una v.a. con distribución $N(0, 1)$. Se propone un nuevo método cuyo error también es normal con media cero pero varianza desconocida; se adoptará este nuevo método si es más preciso que el anterior. Se tomaron 21 mediciones y se obtuvo $\tilde{s}^2 = 0.60$.

      i. Se quiere que la probabilidad de cambiar de método si el nuevo en realidad es menos preciso sea a lo sumo del 1%. ¿Adoptaría o no el nuevo método?

      ii. Acotar el valor p.

      iii. Acotar la probabilidad de quedarse con el viejo método de medición cuando la varianza del nuevo es en realidad 0.80.

4. (a) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución $Bi(1, p)$. Encontrar el test UMP de nivel α para $H_0 : p \leq p_0$ vs $H_1 : p > p_0$.

   (b) Para curar cierta enfermedad se emplea actualmente un tratamiento que tiene un 40% de éxito. Un nuevo tratamiento es probado en 10 pacientes elegidos al azar y 9 de ellos se curan.

      i. Si se quiere que la probabilidad de adoptar el nuevo tratamiento cuando no es mejor que el actual sea 0.05, ¿qué decisión se toma?

      ii. Calcular el valor p.

      iii. ¿Cuál es la probabilidad de no cambiar de tratamiento si el nuevo en realidad tiene una probabilidad de éxito del 45%?

   (c) Seis estudiantes se pusieron a dieta para bajar de peso, con los siguientes resultados:

Nombre	Abdul	Ed	Jim	Max	Phil	Ray
Peso antes (X)	87	95	94	91	100	94
Peso después (Y)	83	93	91	89	102	90

   ¿Puede concluirse que esta dieta es efectiva? ¿Cuál es el valor p para estos datos? (AYUDA: La dieta es efectiva cuando $P(X > Y) > P(X \leq Y)$.)

5. (a) Probar que la familia de densidades de la forma

$$p_\theta(x) = a(\theta)\, h(x)\, \mathrm{I}_{(-\infty,\theta)}(x)$$

   tiene CVM en $X_{(n)}$.

(b) Si $X_1, \dots, X_n$ es una m.a. de una distribución $\mathcal{U}(0, \theta)$, encontrar el test UMP de nivel α para $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$.

C) Tests del cociente de máxima verosimilitud.

1. Se diseñó un sistema de riego de manera que el tiempo promedio de activación sea a lo sumo 25 segundos. Se lo probó 11 veces, obteniéndose los siguientes tiempos de activación:

$$27 \quad 41 \quad 22 \quad 27 \quad 23 \quad 35 \quad 30 \quad 24 \quad 27 \quad 28 \quad 22$$

Se supone que el tiempo de activación es una v.a. con distribución normal.

(a) A nivel 0.05, ¿contradicen estos datos las especificaciones del sistema?

(b) Acotar el valor p.

2. (a) Sea $X_1, \dots, X_n$ una m.a. de una distribución $N(\mu_1, \sigma^2)$ e $Y_1, \dots, Y_m$ una m.a. de una distribución $N(\mu_2, \sigma^2)$ independiente de la anterior. Si llamamos $\Delta = \mu_1 - \mu_2$, probar que el test de CMV de nivel α para $H_0 : \Delta = 0$ vs $H_1 : \Delta \neq 0$ rechaza H_0 si y sólo si

$$\frac{\left|\bar{X} - \bar{Y}\right|}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} > t_{n+m-2, \alpha/2}.$$

(b) Un terreno se divide en 20 lotes semejantes. Se pone a prueba un nuevo fertilizante (I) colocándolo por aspersión en 10 lotes elegidos al azar. En los otros 10 lotes se utiliza como control un fertilizante de uso corriente (II). En cada parcela se planta el mismo número de plantas de tomate, y se observa el rendimiento (en kg/ha) en cada lote, obteniéndose

$$\begin{array}{llll} \bar{X} = 130 & s_X = 10 & \text{para el fertilizante I} \\ \bar{Y} = 120 & s_Y = 8 & \text{para el fertilizante II} \end{array}$$

Se supone que los datos provienen de muestras aleatorias con distribución normal y varianzas iguales.

i. Testear a nivel 0.05 si hay diferencia entre los rendimientos.

ii. Acotar el valor p. ¿Qué decisión se hubiera tomado a nivel 0.01?

3. Sea $X_1, \dots, X_n$ una m.a. de una distribución $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y_1, \dots, Y_m$ una m.a. de una distribución $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ independiente de la anterior. Probar que el test de CMV de nivel α para $H_0 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1$ vs $H_1 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 \neq 1$ rechaza H_0 si y sólo si

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} > k_1 \text{ ó } \frac{s_1^2}{s_2^2} < k_2$$

para ciertas constantes k_1 y k_2 adecuadas. (Por simplicidad, se toma $k_1 = f_{n-1,m-1,\alpha/2}$ y $k_2 = f_{n-1,m-1,1-\alpha/2}$.)

4. El riesgo de inversiones alternativas es evaluado generalmente por la varianza de las ganancias asociadas a cada inversión. La distribución de las ganancias anuales de dos inversiones alternativas A y B se supone normal. En base a la información de 10 años pasados en el caso de la inversión A y de 16 años en el caso de la inversión B, se calcularon las varianzas estimadas de las ganancias para las dos inversiones, obteniéndose $s_A^2 = 3.2$ y $s_B^2 = 7.5$. ¿Puede decirse a nivel 0.05 que la inversión B es tan riesgosa como la A?¿Y a nivel 0.10?

5. Se tomaron aleatoriamente 8 pares de pollos hermanos y se eligió al azar dentro de cada par cual iba a la muestra A y cual a la B. Los pollos de la muestra A han sido criados en encierro, mientras que los de la muestra B al aire libre. Los datos siguientes corresponden al peso de los pollos de 7 semanas:

Muestra A	255	481	360	368	425	283	311	368
Muestra B	226	425	311	311	255	340	311	284

Suponiendo normalidad de los datos,

(a) ¿existe alguna diferencia en el peso medio a las 7 semanas entre los métodos de crianza? Testear a nivel 0.01.

(b) Acotar el valor p.

D) Tests con nivel de significación asintótico.

1. Se supone que en cierta población de insectos la cantidad de hembras es igual a la de machos. Para poner a prueba esta creencia, un entomólogo tomó una muestra de 100 de estos insectos, resultando machos 43 de ellos.

   (a) Utilizando un test de nivel asintótico, decidir si hay suficiente evidencia a nivel 0.05 para rechazar la suposición. Calcular el valor p aproximado.

   (b) Si el porcentaje de hembras fuera 0.55, ¿cuál sería la probabilidad de tomar una decisión incorrecta?

2. El número de personas que llega a la boletería de una estación de trenes entre las 14 y 14:30 hs. tiene distribución de Poisson. El jefe de la estación está evaluando la posibilidad de abrir otra ventanilla en ese horario y considera que es necesario sólo si la media de arribos es superior a 20 individuos. Además, quiere que la probabilidad de abrir una nueva ventanilla cuando en realidad no es necesario sea a lo sumo 0.01. Durante 45 días se observa el número de personas que arriba en dicho horario y se calcula una media muestral de 21 individuos.

   (a) Proponer un test para este problema. ¿Qué decisión toma en base a estos datos? ¿Cuál es el valor p aproximado?

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de dejar una sola boletería cuando en realidad la media verdadera es de 22 personas?

   (c) Si se hubiera querido que la probabilidad calculada en (b) fuera a lo sumo 0.05, ¿qué tamaño muestral debería haberse tomado?

3. Se ha tomado una muestra aleatoria de tamaño 30 de los días que demora una empresa en instalar una línea telefónica a partir del momento de su solicitud. Los datos obtenidos fueron los siguientes:

   3, 4, 5, 3, 2, 7, 6, 4, 6, 4, 7, 2, 3, 4, 6,
   7, 3, 5, 6, 6, 4, 5, 5, 7, 3, 2, 2, 4, 3, 5.

   La compañía, por contrato, debe tener un valor medio de demora no mayor que 4 días. El gobierno le inició juicio a la compañía porque cree que ésta no cumplió con el contrato. El juez considera que su veredicto debe ser hecho de manera tal que la probabilidad de fallar contra la compañía cuando ésta ha cumplido con lo estipulado en el contrato sea aproximadamente 0.05.

(a) Suponiendo que la distribución de los tiempos de espera es $\mathcal{E}(\lambda)$, encontrar el test asintótico en el cual el juez debe basar su decisión y el veredicto al que arribaría con la muestra dada.

(b) Expresar la función de potencia del test en términos de una función de distribución conocida.

(c) ¿Qué tamaño de muestra debería utilizarse si se quiere que la probabilidad de condenar a la compañía sea 0.99 cuando el valor medio de la demora es de 5 días?

4. Un dado se tira 600 veces y se obtienen los siguientes resultados:

Número	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Frecuencia	87	96	108	89	122	98

¿Puede decirse que el dado no es balanceado? Calcular el valor p aproximado.

E) Tests IUMP.

1. Generalización de Neyman-Pearson: sean $(f_k(x))_{k=0}^{n}$ funciones integrables en $I\!R$ cualquier función integrable de la forma

$$\Phi_0(X) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad f_0(x) > \sum_{i=1}^{n} k_i f_i(x) \\ \gamma(x) & \text{si} \quad f_0(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i f_i(x) \\ 0 & \text{si} \quad f_0(x) < \sum_{i=1}^{n} k_i f_i(x) \end{cases},$$

$0 \leq \gamma(x) \leq 1$. Sea $\Phi_0(X)$ maximiza $\int \Phi(X)\ f_0(x)\ dx$ entre las funciones Φ, $0 \leq \Phi \leq 1$, tales que:

$$\int \Phi(x) f_j(x)\, dx = \int \Phi_0(x) f_j(x)\, dx, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Si $k_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$, entonces maximiza entre las funciones tales que:

$$\int \Phi(x) f_j(x)\, dx \leq \int \Phi_0(x) f_j(x)\, dx.$$

2. Sean $X_1, \ldots, X_n$ es una m.a. de una distribución Paretto, o sea la densidad de X_1 esta dada por

$$f(x,\theta) = \theta x^{-\theta-1} \mathrm{I}_{(1,+\infty)}(x) \quad 0 < \theta$$

Hallar el test IUMP para:

(a) $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$

(b) $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$

3. Sean $X_1, \ldots, X_n$ es una m.a. de una distribución $\mathcal{P}(\lambda)$ hallar el test IUMP para:

(a) $H_0 : \lambda = \lambda_0$ vs $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$

(b) $H_0 : \lambda \leq \lambda_0$ vs $H_1 : \lambda > \lambda_0$