A) Estimadores de Bayes.

1. Consideremos una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ tal que $X_i|_{\boldsymbol{\theta}=\theta} \sim F_\theta$ y $\boldsymbol{\theta}$ tiene distribución a priori Λ. Se quiere estimar $q(\theta)$ con función de pérdida cuadrática. Probar que si $T(\mathbf{X})$ es un estadístico suficiente para θ, entonces el estimador de Bayes de $q(\theta)$ depende de $\mathbf{X}$ sólo a través de T.

2. (a) Sea $\boldsymbol{\theta}$ con distribución a priori Λ y $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. tal que $X_i|_{\boldsymbol{\theta}=\theta} \sim F_\theta$. Se desea estimar $q(\theta)$ utilizando la función de pérdida cuadrática. Demostrar que si el estimador de Bayes $\delta_\Lambda(\mathbf{X})$ es un estimador insesgado de $q(\theta)$, es decir

$$E\left(\delta_\Lambda(\mathbf{X}) \mid \boldsymbol{\theta}=\theta\right) = q(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta,$$

entonces $E\left[\left(\delta_\Lambda(\mathbf{X}) - q(\boldsymbol{\theta})\right)^2\right] = 0.$

   (b) Mostrar que $\bar{X}$ no es un estimador de Bayes de θ para ninguna distribución a priori Λ cuando $X|_{\boldsymbol{\theta}=\theta} \sim N(\theta, 1)$.

3. (a) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. tal que $X_i|_{\boldsymbol{\theta}=\theta} \sim F_\theta$ y $\boldsymbol{\theta} \sim \Lambda$. Se quiere estimar θ con función de pérdida $L(\theta, d)$. Se define el riesgo a posteriori de un estimador $\delta(\mathbf{X})$ como

$$r(\delta|\mathbf{x}) = E\left(L(\boldsymbol{\theta}, \delta(\mathbf{X}))\,|\mathbf{X}=\mathbf{x}\right).$$

Probar que si existe una función $\delta_\Lambda(\mathbf{x})$ tal que $r(\delta_\Lambda|\mathbf{x}) = \min\limits_{\delta} r(\delta|\mathbf{x})$, entonces $\delta_\Lambda(\mathbf{X})$ es un estimador de Bayes de θ.

   (b) Hallar el estimador de Bayes de θ cuando $L(\theta, d) = w(\theta)(\theta - d)^2$ con $w(\theta) > 0$.

   (c) Hallar el estimador de Bayes de θ cuando $L(\theta, d) = |\theta - d|$.

4. Sea X una v.a. tal que $X|_{\boldsymbol{\theta}=\theta} \sim \mathcal{U}(0, \theta)$ y $\boldsymbol{\theta} \sim \Gamma(2, 1)$.

   (a) Encontrar el estimador de Bayes cuando $L(\theta, d) = (\theta - d)^2$.

   (b) Encontrar el estimador de Bayes cuando $L(\theta, d) = |\theta - d|$.

5. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. tal que $X_i|_{\boldsymbol{\theta}=\theta} \sim Bi(1, \theta)$ y $\boldsymbol{\theta} \sim \Lambda$ continua. Consideremos la función de pérdida cuadrática.

   (a) Probar que $\bar{X}$ no es un estimador de Bayes de θ.

   (b) Hallar el estimador de Bayes δ_Λ cuando $\Lambda = \beta(r, s)$, con $r, s > 0$. Mostrar que δ_Λ es un promedio pesado entre $\bar{X}$ y $\dfrac{r}{r+s}$. Interpretar.

   Recordar: que $\boldsymbol{\theta} \sim \beta(r, s)$ si su función de densidad es

$$f(\theta) = \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} \theta^{r-1} (1-\theta)^{s-1} I_{(0,1)}(\theta)$$

   (c) Encontrar el estimador de Bayes de θ con función de pérdida $L(\theta, d) = \dfrac{(\theta - d)^2}{[\theta(1-\theta)]}$. ¿Qué pasa en el caso $\Lambda = \mathcal{U}(0, 1)$?

6. Consideremos una m.a. $X_1, \ldots, X_n$ tal que $X_i|_{\boldsymbol{\theta}=\theta} \sim \mathcal{P}(\theta)$ y $\boldsymbol{\theta} \sim \Gamma(r, \lambda)$, con $r, \lambda > 0$.

   (a) Encontrar el estimador Bayes δ_Λ y calcular $r(\delta_\Lambda, \Lambda)$ el riesgo de Bayes.

   (b) Mostrar que δ_Λ puede escribirse como un promedio pesado entre $\bar{X}$ y $\dfrac{r}{\lambda}$. Interpretar.

   (c) Comparar $r(\delta_\Lambda, \Lambda)$ con $r\left(\bar{X}, \Lambda\right)$. Mostrar que $\dfrac{r\left(\bar{X}, \Lambda\right)}{r(\delta_\Lambda, \Lambda)} \to 1$ cuando $n \to \infty$.

   (d) Encontrar el estimador de Bayes de θ para la función de pérdida $L(\theta, d) = \dfrac{(\theta - d)^2}{\theta}$ y calcular $r(\delta_\Lambda, \Lambda)$.

B) Estimadores minimax y admisibles.

1. Demostrar que si un estimador es admisible y tiene riesgo constante, entonces es minimax. Recordar que $\delta(\mathbf{X})$ es un estimador *admisible* de θ si y sólo si no existe $\delta^*(\mathbf{X})$ otro estimador tal que:

   - $R(\delta^*, \theta) \leq R(\delta, \theta) \quad \forall \theta \in \Theta$, siendo $R(\delta, \theta) = E(L(\boldsymbol{\theta}, \delta(\mathbf{X})) | \boldsymbol{\theta} = \theta)$ el riesgo frecuentista.
   - $\exists\ \theta^* : R(\delta^*, \theta^*) < R(\delta, \theta^*)$

2. Sea $X|_{\boldsymbol{\theta}=\theta} \sim Bi(n, \theta)$ y supongamos que se quiere estimar θ con función de pérdida cuadrática. Dado $0 < \varepsilon < 1$, consideremos el estimador aleatorizado

$$\delta_\varepsilon(X) = (1 - \tau) \cdot \frac{X}{n} + \tau \cdot \frac{1}{2}$$

   donde $\tau \sim \mathrm{Bi}(1, \varepsilon)$ y es independiente de X.

   (a) Determinar la función de riesgo de δ_ε y verificar que para $\varepsilon = 1/(n+1)$ es constante y menor que $\sup_\theta R(\theta, X/n)$. (Por lo tanto X/n no es minimax.)

   (b) Demostrar que

$$\delta^*(X) = \frac{\sqrt{n}}{1 + \sqrt{n}} \cdot \frac{X}{n} + \frac{1}{1 + \sqrt{n}} \cdot \frac{1}{2}$$

   es minimax y admisible.

   Sugerencia: usar el ejercico 5 de la parte anterior.

   (c) Probar que $R(\theta, X/n) > R(\theta, \delta^*) \Leftrightarrow \theta \in I_n$, donde el intervalo I_n es de la forma $1/2 \pm c_n$ con $c_n \to 0$. Por lo tanto, dado cualquier $\theta \neq 1/2$, existe N_θ tal que $R(\theta, X/n) < R(\theta, \delta^*)$ para $n \geq N_\theta$. Por otra parte, $R(1/2, X/n) / R(1/2, \delta^*) \to 1$. Sacar conclusiones.

3. (a) Si $X_1, \ldots, X_n$ es una m.a. tal que $X|_{\boldsymbol{\theta}=\theta} \sim Bi(1, \theta)$, probar que $\bar{X}$ es minimax y admisible para la función de pérdida $L(\theta, d) = (\theta - d)^2 / [\theta(1 - \theta)]$.

   (b) Deducir que $\bar{X}$ también es admisible para la función de pérdida cuadrática.

4. Si $X_1, \ldots, X_n$ es una m.a. tal que $X|_{\boldsymbol{\theta}=\theta} \sim \mathcal{P}(\theta)$, mostrar que $\bar{X}$ es el único minimax para la función de pérdida $L(\theta, d) = (\theta - d)^2 / \theta$.