

## A) Error cuadrático medio. Estimadores insesgados.

1. Sea  $X_1, \dots, X_n$  una muestra aleatoria de una distribución con parámetro  $\theta$ . Sea  $\hat{\theta}_n = \delta(\mathbf{X})$  un estimador de  $\theta$  con varianza finita. Si  $b(\hat{\theta}_n)$  es el sesgo de  $\hat{\theta}_n$ , probar que  $\text{ECM}(\hat{\theta}_n) = V(\hat{\theta}_n) + b(\hat{\theta}_n)^2$ .
2. Sea  $X_1, \dots, X_n$  una m.a. de una distribución tal que existe  $E(X_1) = \mu$ . Consideremos la clase de estimadores

$$\mathcal{D} = \left\{ \delta(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i : \alpha_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}.$$

- (a) Probar que todo  $\delta \in \mathcal{D}$  es un estimador insesgado de  $\mu$ .
  - (b) Supongamos que existe  $V(X) = \sigma^2$ . Mostrar que  $\bar{X} = \arg \min_{\delta \in \mathcal{D}} V(\delta)$ .
3. Sea  $X_1, \dots, X_n$  una m.a. de una distribución tal que existe  $V(X) = \sigma^2$ .

- (a) Demostrar que

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

es un estimador insesgado de  $\sigma^2$ .

- (b) Sea  $X_1, \dots, X_n$  es una m.a. de una distribución  $N(\mu, \sigma^2)$ , calcular el  $\text{ECM}(s^2)$  y el  $\text{ECM}(\tilde{\sigma}^2)$  donde  $\tilde{\sigma}^2 = (n-1)s^2/(n+1)$ .
  - (c) Probar que, aunque  $\text{ECM}(s^2) > \text{ECM}(\tilde{\sigma}^2)$ , la razón entre los ECM tiende a 1 cuando  $n \rightarrow \infty$ .
  - (d) Mostrar que la contribución del sesgo de  $\tilde{\sigma}^2$  a  $\text{ECM}(\tilde{\sigma}^2)$  es despreciable cuando  $n \rightarrow \infty$  (en el sentido de que la razón entre  $b(\tilde{\sigma}^2)^2$  y  $\text{ECM}(\tilde{\sigma}^2)$  tiende a 0).
4. Dada una m.a.  $X_1, \dots, X_n$  de una distribución  $\mathcal{U}(0, \theta)$ , sea  $\hat{\theta}_n$  el EMV de  $\theta$  y  $\tilde{\theta}_n$  el estimador de  $\theta$  basado en el primer momento.
    - (a) Probar que  $\tilde{\theta}_n$  es insesgado y que  $\hat{\theta}_n$  es asintóticamente insesgado.
    - (b) Calcular el ECM de ambos estimadores. ¿Qué estimador preferiré a desde este punto de vista?

## B) Estadísticos suficientes.

5. Sea  $X_1, \dots, X_n$  una muestra aleatoria de una distribución  $\mathcal{P}(\lambda)$ . Demostrar que  $T = \sum_{i=1}^n X_i$  es un estadístico suficiente para  $\lambda$ :
  - (a) Aplicando la definición.
  - (b) Aplicando el Teorema de Factorización.
6. Sean  $X_1, \dots, X_n$  una muestra aleatoria con distribución continua  $F(x, \theta)$ . Demostrar que  $T(\mathbf{X}) = (X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$  es suficiente para  $\theta$ .
7. Sea  $X_1, \dots, X_n$  una muestra aleatoria. Probar que:

- (a) Si  $X_i \sim Bi(n_i, p)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , con  $n_i$  conocidos, entonces  $\sum_{i=1}^n X_i$  es suficiente para  $p$ .
- (b) Si  $X_i \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$  entonces  $(\prod_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i)$  es suficiente para  $(\alpha, \lambda)$ .  
 Si  $\alpha$  es conocido, entonces  $\sum_{i=1}^n X_i$  es suficiente para  $\lambda$ .  
 Si  $\lambda$  es conocido, entonces  $\prod_{i=1}^n X_i$  es suficiente para  $\alpha$ .
- (c) Si  $X_i \sim \beta(r, s)$  entonces  $(\prod_{i=1}^n X_i, \prod_{i=1}^n (1 - X_i))$  es suficiente para  $(r, s)$ .  
 Si  $r$  es conocido, entonces  $\prod_{i=1}^n (1 - X_i)$  es suficiente para  $s$ .  
 Si  $s$  es conocido, entonces  $\prod_{i=1}^n X_i$  es suficiente para  $r$ .
- (d) Si  $X_i$  tiene función de probabilidad puntual

$$f(x; \theta, p) = (1 - p)p^{x-\theta} \text{ para } x = \theta, \theta + 1, \theta + 2, \dots$$

con  $(\theta, p) \in \mathbb{R} \times (0, 1)$ , entonces  $(X_{(1)}, \sum_{i=1}^n X_i)$  es suficiente para  $(\theta, p)$ .  
 Si  $p$  es conocido, entonces  $X_{(1)}$  es suficiente para  $\theta$ .  
 Si  $\theta$  es conocido, entonces  $\sum_{i=1}^n X_i$  es suficiente para  $p$ .

8. Sean  $X_1, \dots, X_n$  v.a.i.i.d.  $\mathcal{U}(\theta_1, \theta_2)$ . Mostrar que  $(X_{(1)}, X_{(n)})$  es suficiente para  $\theta$ .
9. Sea  $X_1, \dots, X_n$  una m.a. de una distribución con densidad

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\frac{(x - \mu)}{\sigma}\right\} I_{[\mu, \infty)}(x)$$

con  $\mu \in \mathbb{R}$  y  $\sigma > 0$ .

- (a) Exhibir un estadístico suficiente bidimensional para  $(\mu, \sigma)$ .
- (b) Hallar un estadístico suficiente para  $\mu$  cuando  $\sigma$  es fijo y conocido.
- (c) Hallar un estadístico suficiente para  $\sigma$  cuando  $\mu$  es fijo y conocido.
10. Consideremos una familia  $\{p(\mathbf{x}, \theta) : \theta \in \Theta\}$  tal que el soporte  $S = \{\mathbf{x} : p(\mathbf{x}, \theta) > 0\}$  es independiente de  $\theta$  y  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ , con  $\theta_1 \in \Theta_1$  y  $\theta_2 \in \Theta_2$  variando independientemente. Supongamos que  $T_1(\mathbf{X})$  es suficiente para  $\theta_1$  cuando  $\theta_2$  es fijo y conocido y que  $T_2(\mathbf{X})$  es suficiente para  $\theta_2$  cuando  $\theta_1$  es fijo y conocido.
- (a) Demostrar que  $T(\mathbf{X}) = (T_1(\mathbf{X}), T_2(\mathbf{X}))$  es suficiente para  $\theta$ .
- (b) Mostrar que la recíproca de (a) no es cierta en general. Considerar la familia  $N(\mu, \sigma^2)$ .
11. Sea  $X_1, \dots, X_n$  una muestra aleatoria de una distribución  $P_\theta$ . Supóngase que  $T(\mathbf{X})$  es un estadístico suficiente para  $\theta$ . Demostrar que el EMV de  $\theta$  depende de  $\mathbf{X}$  sólo a través de  $T(\mathbf{X})$ .

### C) Estimadores basados en estadísticos suficientes.

12. Sea  $X_1, \dots, X_n$  una muestra aleatoria de una distribución  $Bi(1, \theta)$ . Luego,  $\delta(\mathbf{X}) = X_1$  es un estimador insesgado de  $\theta$  y  $T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$  es un estadístico suficiente.
- (a) Usando el Teorema de Rao-Blackwell, hallar un estimador insesgado  $\delta^*(T)$  que sea mejor que  $\delta$ .
- (b) Probar que  $V_\theta(\delta^*) < V_\theta(\delta) \quad \forall \theta$  si  $n > 1$ .

13. Sea  $X_1, \dots, X_n$  una m.a. de una distribución  $\mathcal{P}(\lambda)$  y  $T = \sum_{i=1}^n X_i$  el estadístico suficiente.
- Sea  $\mu = e^{-\lambda}$ . Mostrar que  $\hat{\mu} = I\{X_1 = 0\}$  es un estimador insesgado de  $\mu$ .
  - Aplicar el Teorema de Rao–Blackwell para obtener un estimador insesgado  $\delta^*(T)$  mejor que  $\hat{\mu}$  y comparar los ECM de ambos estimadores.
14. Sea  $X_1, \dots, X_n$  una m.a. de una distribución  $Bi(1, \theta)$ . Dados  $m$  y  $k$  tales que  $k \leq m < n$ , se quiere estimar  $q(\theta) = \binom{m}{k} \theta^k (1 - \theta)^{m-k}$ . Sea  $S = \sum_{i=1}^m X_i$  y  $h(S) = I\{S = k\}$ .
- Probar que  $h(S)$  es un estimador insesgado de  $q(\theta)$ .
  - Construir un estimador insesgado de  $q(\theta)$  mejor que  $h(S)$ .
15. Sea  $X_1, \dots, X_n$  una m.a. de una distribución  $N(\mu, 1)$  y  $\xi \in \mathbb{R}$  un número fijo y conocido. Se desea estimar  $p = P(X_1 \leq \xi)$ .
- Mostrar que  $I\{X_1 \leq \xi\}$  es un estimador insesgado de  $p$ .
  - A partir de  $T = \bar{X}$ , construir otro estimador insesgado  $\delta^*(T)$  mejor que el anterior.  
*Sugerencia:* probar y usar que  $\bar{X}$  y  $X_1 - \bar{X}$  son independientes.

D) Ejercicio para hacer usando la computadora.

1. El objetivo de este ejercicio es estimar  $\theta$ , de una población  $U(0, \theta)$ , para esto tenemos los siguientes 4 estimadores de  $\theta$ :

Método de momentos:  $\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}_n$

Método de máxima verosimilitud:  $\hat{\theta}_2 = \max\{X_1, \dots, X_n\}$

Un estimador robusto:  $\hat{\theta}_3 = 2 \text{mediana}\{X_1, \dots, X_n\}$

MV corregido:  $\hat{\theta}_4 = (6/5)\hat{\theta}_2$

La propuesta es sin usar herramientas teóricas inferir cual podría dar una mejor estimación. Para esto generemos 1.000 muestras  $X_1, \dots, X_n$  de tamaño  $n = 5$  de una población  $U(0, 1)$  (es decir, busquemos estimar  $\theta = 1$ .)

- Para cada una de las 1.000 muestras calcular los cuatro estimadores alternativos de  $\theta$ .
- Para cada uno de los 4 conjuntos de 1000 datos (los estimadores calculados), graficar en un mismo gráfico los boxplots. Qué observa? Qué estimador tiene mayor varianza? hay algún estimador que pareciera sesgado? Qué estimador prefiere?
- Según el gráfico anterior cuanto vale aproximadamente  $P_\theta(\hat{\theta}_1 \leq \theta)$