D) Estadísticos minimales suficientes.

25. Sea X_1 una variable $N(\mu, \sigma_1^2)$ y X_2 con distribución $N(\mu, \sigma_2^2)$ independiente de X_1. Probar que $T = (X_1, X_2, X_1^2, X_2^2)$ es minimal suficiente pero no completo y que no existe un estimador IMVU para μ.

Solución: La parte difícil que es la que vamos a demostrar es que no existe un estimador IMVU para μ.

Sea $\mathcal{P} = \{f(X_1, X_2, \theta) = f_{X_1}(X_1, \theta) f_{X_2}(X_2, \theta)$ con $\theta = (\mu, \sigma_1^2, \sigma_2^2)\}$ y sea $\mathcal{P}_r = \{f(X_1, X_2, \theta) = f_{X_1}(X_1, \theta) f_{X_2}(X_2, \theta)$ con $\theta = (\mu, \sigma_1^2, \frac{\sigma_1^2}{r})$ con $r > 0$ conocido$\}$

La idea es encontrar $\delta_r(\mathbf{X})$, un estimador IMVU en $\mathcal{P}_r$. Este estimador resultará dependiente de r que en $\mathcal{P}_r$ es conocido y por lo tanto $\delta_r(\mathbf{X})$ será un estimador en $\mathcal{P}_r$. Pero, probaremos que de existir un IMVU en $\mathcal{P}$ este deberá ser $\delta_r(\mathbf{X})$ que en $\mathcal{P}$ no es un estimador pues r es desconocido.

Es fácil ver (usando flias. exponenciales) que $T_r = (X_1 + rX_2, X_1^2 + rX_2^2)$ es suficiente y completo en $\mathcal{P}_r$ y que $\delta_r(X_1, X_2) = \frac{X_1 + rX_2}{r+1}$ es IMVU en $\mathcal{P}_r$ para μ (por estar basado en T_r y ser insesgado)

Entonces tomemos ahora $\delta(X_1, X_2)$ un estimador IMVU en $\mathcal{P}$. Entonces

$$Var_\theta(\delta(X_1, X_2)) \leq Var_\theta(\delta_r(X_1, X_2))$$

para todo θ. En particular en $\mathcal{P}_r$, $Var_\theta(\delta(X_1, X_2)) = Var_\theta(\delta_r(X_1, X_2))$. Ahora como $\delta_r(X_1, X_2)$ esta basado en T_r y $\delta(X_1, X_2)$ es insesgado (por unicidad) tenemos que

$$\delta_r(X_1, X_2) = E(\delta(X_1, X_2)|T_r).$$

Entonces, usemos una igualdad que esta en la práctica de proba. de esperanza condicional.

$$Var(Z) = Var(E(Z|Y)) + E((E(Z|Y) - Z)^2)$$

tomando $Z = \delta(X_1, X_2)$ y $Y = T_r$ tenemos,

$$Var(\delta(X_1, X_2)) = Var(E(\delta(X_1, X_2)|T_r)) + E((E(\delta(X_1, X_2)|T_r) - \delta(X_1, X_2))^2)$$

ahora habíamos dicho que $\delta_r(X_1, X_2) = E(\delta(X_1, X_2)|T_r)$ entonces $Var(E(\delta(X_1, X_2)|T_r)) = Var(\delta_r(X_1, X_2))$. Por lo tanto

$$Var(\delta(X_1, X_2)) = Var(\delta_r(X_1, X_2)) + E((\delta_r(X_1, X_2) - \delta(X_1, X_2))^2)$$

Entonces en $\mathcal{P}_r$ como $Var(\delta(X_1, X_2)) = Var(\delta_r(X_1, X_2))$ tenemos que

$$E((\delta_r(X_1, X_2) - \delta(X_1, X_2))^2) = 0$$

y concluímos que $P(\delta_r(X_1, X_2) = \delta(X_1, X_2)) = 1$.

Luego ambos estimadores son iguales entonces $\delta_r(X_1, X_2)$ es IMVU en $\mathcal{P}$ que es absurdo pues $\delta_r(X_1, X_2)$ no es estimador en $\mathcal{P}$.