

ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (B) - Segundo cuatrimestre 2012

Práctica 8 - Diagonalización

1. Hallar los autovalores y bases de los respectivos autoespacios para cada una de las siguientes matrices:

$$(a) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(e) \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(f) \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(g) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(h) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(i) \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Determinar si cada una de las matrices A del ejercicio 1 es o no diagonalizable. En los casos en que sí lo sea, hallar una base de autovectores de A y una matriz invertible C que diagonalice a A (es decir, tal que $C^{-1} \cdot A \cdot C$ sea diagonal).

3. Mostrar que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ no es diagonalizable cualesquiera sean $a, b \in \mathbb{R}$ con tal que $b \neq 0$.

4. Sea $A = \begin{pmatrix} r & s & t \\ -12 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ una matriz tal que $v = (1, 2, 0)$, $w = (2, 6, 0)$ y $u = (-2, -2, -1)$ son autovectores de A .

(a) Probar que A es diagonalizable.

(b) Calcular los autovalores de A y determinar los valores de r, s y t .

5. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Probar que A es diagonalizable y hallar una matriz invertible C que diagonalice a A .

(b) Calcular A^{10} .

6. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y sea $v = (1, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Probar que A es diagonalizable y hallar una matriz invertible C que diagonalice a A .

(b) Calcular $A^6 \cdot v^t$ utilizando la diagonalización de A .

(c) Escribir al vector v como combinación lineal de una base de \mathbb{R}^3 de autovectores de A .

(d) Calcular nuevamente $A^6 \cdot v^t$ sin utilizar la diagonalización de A .

7. Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y sea $v = (-2, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$.

- (a) Hallar los autovalores de A y los autovectores asociados.
- (b) Probar que A **no** es diagonalizable.
- (c) Escribir al vector v como combinación lineal de autovectores de A .
- (d) Calcular $A^{63} \cdot v^t$.

8. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

- (a) Hallar todos los valores de $b \in \mathbb{R}$ para los cuales $\lambda = 3$ es autovalor de A .
- (b) Para cada b hallado, dar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que A **no** es diagonalizable.

9. Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **no** es diagonalizable.

10. Sea $A = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ a+2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

- (a) Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que A **no** es diagonalizable.
- (b) Para cada a hallado, dar todos los $b \in \mathbb{R}$ tales que $(0, b^2 + 1, 2)$ es autovector de A .

11. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \\ 2 & 2 & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que $\lambda = 1$ es autovalor de A y $(1, 1, 1) \in N(I - A)$.

- (a) Determinar a, b y c y hallar todos los autovalores de A .
- (b) ¿Es A diagonalizable?
- (c) Calcular A^{100} y A^{201} .

12. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Hallar los autovalores y autovectores de A, A^3 y A^9 .

13. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ una matriz con autovalores $\{0, 1, 5\}$.

- (a) Determinar si A es inversible y/o diagonalizable.
- (b) Calcular los autovalores de $B = (3A - 4I)^3$ y $C = 5A^t + 4I$.
- (c) Probar que $H = A + I$ es inversible y calcular los autovalores de H^{-1} , $\det(H^{-1})$ y $\text{tr}(H^{-1})$.
- (d) Hallar todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales $\alpha A + 3I$ no es inversible.

14. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ una matriz tal que $\{1, 2, 3\}$ son las raíces de χ_A . Sea $B = 5A^2 + 3A - 2I$. Calcular $\det(B)$ y $\text{tr}(B)$.

15. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ una matriz tal que $\lambda = 1$ es autovalor de A , $\text{tr}(A) = 2$ y $\det(A) = -2$.
- Hallar **todos** los autovalores de A .
 - Decidir si A^t es o no diagonalizable.
16. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ una matriz tal que $\dim(N(A)) = 1$, $\text{rg}(A + 2I) = 2$ y $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$.
- Calcular los autovalores de A .
 - Decidir si A es inversible y/o diagonalizable.
17. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ una matriz inversible tal que $\text{tr}(A) = -2$, $\text{rg}(A^{-1} - \frac{1}{2}I) < 3$ y $\chi_A(1) = -8$. Probar que A es diagonalizable.
18. Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ una matriz tal que $N(A + I) \neq \{0\}$, $\text{rg}(A - 2I) \leq 2$ y $\chi_A(1) = -4$. Decidir si A es diagonalizable y calcular $A^3 - 4A^2 + A + 6I$.

19. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$. Probar que:

- $A^4 = 7A^3 - 17A^2 + 5A + 6I$.
- $A^5 - 6A^4 = -10A^3 - 12A^2 + 11A + 6I$.