ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (B) - Segundo cuatrimestre 2012

Práctica 6 - Aproximación por cuadrados mínimos

1. Hallar y graficar las rectas que mejor aproximan en el sentido de los cuadrados mínimos a los siguientes conjuntos de puntos:
   (a) $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,3)$, $(3,3)$ y $(4,3)$.
   (b) $(1,0)$, $(3,2)$, $(5,4)$, $(6,5)$ y $(7,7)$.
2. Encontrar el polinomio de grado 2 que mejor aproxima en el sentido de cuadrados mínimos la tabla:

x	0.1	0.3	0.5	0.7
y	1.3	2	2.7	3.5

3. Ajustar la siguiente tabla de datos mediante una función exponencial de la forma $y = k \cdot a^x$:

x	0	1	2	3	4
y	2	3	6	9	15

4. La siguiente tabla tiene la altura y el peso de 6 hombres entre 25 y 29 años de edad:

Altura (metros)	1.83	1.73	1.68	1.88	1.63	1.78
Peso (kilogramos)	79	69	70	81	63	73

   (a) Ajustar linealmente estos datos.
   (b) Estimar el peso de un hombre de 27 años y 1.75 m de altura.
   (c) Estimar la altura de una persona de 28 años y 68 kg. de peso.
5. En un cultivo se mide la cantidad de bacterias por unidad de volumen cada hora, obteniéndose la siguiente tabla de datos:

Horas	0	1	2	3	4	5	6
Bacterias	32	47	65	92	132	190	275

   (a) Ajustar estos datos con una función exponencial.
   (b) Estimar, según la aproximación hecha, el número de bacterias en la décima hora de la medición.
6. El porcentaje de mortalidad de ciertos ácaros expuestos a una temperatura menor que 0°C durante cierto número de días está descrito en la siguiente tabla:

Días	1	3	8	13	16
Porcentaje	0.8	3.6	11.6	22.6	30

   Ajustar estos datos con un polinomio de grado 2.

7. Para la siguiente tabla de datos se ha propuesto el modelo $y = \dfrac{10}{ax+b}$ donde a y b son valores desconocidos.

x	0	1	2	3	4
y	9.9	3.4	2	1.43	1.1

Haciendo el cambio de variable $z = \dfrac{10}{y}$ y empleando el método de cuadrados mínimos, estimar los valores de a y b.

8. Para el modelo $y = \dfrac{x^2+1}{ax+b}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, calcular la mejor aproximación en el sentido de los cuadrados mínimos, a partir de los siguientes datos:

x	0	1	2	3
y	0.6	0.5	1	1.5

9. Se sabe que la siguiente tabla de datos corresponde con una muestra que verifica una relación de la forma $ax + 3y + bz = 0$. Plantear un modelo conveniente que permita determinar los valores de a y $b \in \mathbb{R}$ por el método de los cuadrados mínimos:

x	-2	0	0.5	1
y	1	0.9	0.1	-1
z	1	0	0.5	1

10. Un economista propone el siguiente modelo para el cambio en el precio del pan:

$$P = \alpha H + \beta T$$

donde P es el cambio en el precio de un kilo de pan, H es el cambio en el precio de una bolsa de harina y T es el cambio en la remuneración por hora de trabajo. En tres años consecutivos se observan los siguientes cambios en los precios del kilo de pan, la bolsa de harina y la remuneración por hora de trabajo:

P	+1	+1	0	-1
H	+10	+20	+10	0
T	+1	0	-1	-1

Aplicar el método de cuadrados mínimos para estimar el cambio en el precio del kilo de pan si el precio del saco de harina baja 20 pesos y la remuneración por hora sube 1 peso.

EJERCICIOS ADICIONALES

Los ejercicios que siguen son opcionales. Se recomienda hacer las operaciones entre matrices por computadora.

11. La tasa de crecimiento específico k de una población puede suponerse regida por un modelo de tasa de crecimiento a saturación del tipo

$$k = k_{\max} \frac{f}{K+f}$$

donde $k_{\max}$ es la máxima tasa de crecimiento posible para valores de comida f abundante y K es la constante de semi-saturación (cantidad de comida disponible que sostiene una tasa de crecimiento poblacional igual a la mitad de la tasa máxima).

La siguiente tabla muestra las medidas de k contra f para una población de levaduras del género Saccharomyces que se utilizan en la elaboración de cerveza, donde f es la concentración de la fuente de carbono que servirá de sustrato a estos microorganismos.

f (mg/l)	7	9	15	25	40	75	100	150
k (días $^{-1}$)	0.29	0.37	0.48	0.65	0.80	0.97	0.99	1.07

Determinar los valores de $k_{\max}$ y K por el método de cuadrados mínimos empleando la linealización del modelo de promedio de crecimiento y saturación dada por $x = 1/f$, $y = 1/k$.

12. Se estudia la tasa de respiración del liquen Parmelia saxatilis en crecimiento bajo puntos de goteo con un recubrimiento galvanizado. El agua que cae sobre el liquen contiene potasio y zinc. Se supone un modelo del tipo

$$\text{Tasa de respiración} = \beta_0 + \beta_1 \cdot \text{Potasio} + \beta_2 \cdot \text{Zinc}.$$

Tasa de respiración	71	53	55	48	69	84	21	68	68
Potasio (ppm)	388	258	292	205	449	331	114	580	622
Zinc (ppm)	2414	10693	11682	12560	2464	2607	16205	2005	1825

Hallar $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ por el método de cuadrados mínimos.