

ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (B) - Segundo cuatrimestre 2012

Práctica 5 - Subespacios y rango de matrices

1. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios del espacio vectorial dado:

- (a) $S \subset \mathbb{R}^2$; $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 - 2x_2 = 0\}$.
- (b) $S \subset \mathbb{R}^2$; $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 - x_2 = 3\}$.
- (c) $S \subset \mathbb{R}^2$; $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1x_2 = 0\}$.
- (d) $S \subset \mathbb{R}^2$; $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 < -1\}$.
- (e) $S \subset \mathbb{R}^3$; $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0, x_3 - x_2 = 0\}$.
- (f) $S \subset \mathbb{R}^3$; $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 4x_2 \geq 0\}$.

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Probar que $S = \{v \in \mathbb{R}^n : A \cdot v^t = 0\}$, el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineal homogéneo, es un subespacio de \mathbb{R}^n .

3. Dibujar los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 y analizar si son subespacios o no:

- (a) $S = \{t(1, 2) : t \in \mathbb{R}\}$.
- (b) $S = \{t(1, 2) + (2, 2) : t \in \mathbb{R}\}$.
- (c) $S = \{t(1, 1) + (2, 2) : t \in \mathbb{R}\}$.
- (d) $S = \{s(1, 2) + t(2, 2) : s, t \in \mathbb{R}\}$.
- (e) $S = \{s(1, 2) + t(2, 4) : s, t \in \mathbb{R}\}$.
- (f) $S = \{s(1, 2) + t(2, 2) : s, t \in \mathbb{R} \text{ con } s + t = 1\}$.

4. Sea \mathbb{V} un espacio vectorial real y sean v_0, v_1 y $v_2 \in \mathbb{V}$.

- (a) Probar que $S = \{t \cdot v_0 : t \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de \mathbb{V} .
- (b) Probar que $T = \{s \cdot v_1 + t \cdot v_2 : s, t \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de \mathbb{V} .
- (c) Describir geoméricamente los subespacios S y T .

5. Se consideran los vectores $v_1 = (2, 3)$ y $v_2 = (1, -1)$ de \mathbb{R}^2 . Determinar si $u = (1, 2)$ es combinación lineal de v_1 y v_2 . ¿Qué sucede con $w = (0, 0)$?

6. Analizar si $v \in S$ o no en cada uno de los siguientes casos:

- (a) $S = \langle (1, 2, 3) \rangle$; $v = (\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \frac{9}{5})$.
- (b) $S = \langle (1, 2, 3), (\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}) \rangle$; $v = (-5, -10, -15)$.
- (c) $S = \langle (1, -1, 2, 1), (2, 1, 3, 0) \rangle$; $v = (0, -3, 1, 1)$.

7. En cada caso, hallar dos subespacios distintos de \mathbb{R}^3 con las condiciones:

- (a) que contenga al vector $v = (1, 2, 3)$.
- (b) que contenga al vector $v = (1, 1, 0)$ y no contenga al vector $w = (0, 1, 1)$.

8. Analizar si los siguientes conjuntos de vectores generan \mathbb{R}^n o no:

- (a) $n = 2$, $\{(1, 1), (1, -1)\}$.
- (b) $n = 2$, $\{(1, 1), (1, -1), (3, 4)\}$.
- (c) $n = 3$, $\{(1, 1, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 0)\}$.
- (d) $n = 3$, $\{(1, 1, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 1), (3, 2, 1)\}$.
- (e) $n = 4$, $\{(1, 1, 1, -1), (0, -1, 1, -2), (1, 1, 0, 1), (3, 2, 1, 2)\}$.

9. Analizar la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores.
- $\{(1, -3, 5), (-2, 2, 1), (-1, -1, 6)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.
 - $\{(1, 2, 2, -1), (0, 2, -2, -3), (1, 1, 0, 2), (0, 1, -1, 0)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^4$.
 - $\{v\}$ con $v \in \mathbb{V}$.
 - $\{v_1, v_2, \dots, v_n, 0\}$ con $v_1, v_2, \dots, v_n, 0 \in \mathbb{V}$.
10. Hallar (si es posible) tres vectores de \mathbb{R}^3 linealmente dependientes de manera tal que dos cualesquiera de ellos sean linealmente independientes.
11. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales los siguientes conjuntos de vectores resultan linealmente independientes en \mathbb{V} :
- $\{(1, -1, 2), (k + 1, k, k + 6), (k, k + 1, 1)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.
 - $\{(k - 2, k, 1, 0), (0, k, 0, 0), (1, 1, 0, k - 1)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^4$.
12. Determinar si los siguientes conjuntos de vectores son una base del espacio \mathbb{V} . En el caso que no sean base, analizar la posibilidad de extraer una base o bien de extender el conjunto a una base de \mathbb{V} .
- $\{(1, 0, 1), (1, 0, -1)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.
 - $\{(1, 1, 2), (0, 1, 1), (0, 0, 0)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.
 - $\{(1, 1, 2), (0, 1, 1), (2, 3, 3)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.
 - $\{(1, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.
 - $\{(1, 1, 1, 1, 1), (1, 2, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 2, 1)\}; \mathbb{V} = \mathbb{R}^5$.
13. Hallar bases y determinar la dimensión de cada uno de los siguientes subespacios:
- $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0, x_3 - x_2 = 0\}$.
 - $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : x_1 - 2x_3 + x_5 = 0, 2x_1 + x_4 - 2x_5 = 0, 3x_1 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0\}$.
 - $S = \langle (1, 1, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 0) \rangle$.
14. Sea $S = \langle (0, -1, k), (1, -1, 0), (-1, 0, 2) \rangle$. Estudiar la dimensión y dar una base del subespacio S en función de k .
15. Dados los subespacios de \mathbb{R}^3 , $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, -4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0\}$ y $T = \langle (2, 3, -1), (-2, 1, 5), (4, 2, -6) \rangle$:
- Probar que $T \subset S$.
 - Calcular $\dim(S)$, $\dim(T)$ y decidir si vale la igualdad $T = S$ o no.
16. En cada uno de los siguientes casos, hallar bases de S , T , $S \cap T$ y $S + T$. ¿Qué relación existe entre las dimensiones de estos cuatro subespacios?
- $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 - x_2 = 0\}$,
 $T = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 = 0, x_2 - x_4 = 0, x_1 - x_3 + x_4 = 0\}$.
 - $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$, $T = \langle (1, 1, 1), (0, -2, 0) \rangle$.
 - $S = \langle (-1, 2, -1, 2), (1, -1, 0, 1), (0, 1, -1, 2) \rangle$,
 $T = \langle (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, -1), (1, 1, 2, 0) \rangle$.

17. Para los subespacios $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ y $T = \langle (2, -1, -1, 3), (1, 1, 0, -2), (4, 1, -1, -1) \rangle$:
- Hallar una base \mathcal{B}_1 del subespacio $S \cap T$.
 - Extender la base \mathcal{B}_1 a una base de S . Hacer lo mismo para una base de T .
 - Hallar una base \mathcal{B}_2 del subespacio $S + T$ que contenga una base de S y una base de T . Extender \mathcal{B}_2 a una base de \mathbb{R}^4 .
18. Sean $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_3 - x_4 = 0, -2x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$ y $T = \langle (0, 1, 2, 0), (1, 2, 0, \lambda) \rangle$.
- Hallar todos los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $S \cap T \neq \{0\}$.
 - Para cada valor λ hallado en (a), encontrar una base de $S \cap T$.
19. Sean S y T subespacios de \mathbb{R}^6 tales que $\dim(S) = 3$ y $\dim(T) = 4$.
- Decidir si las siguientes situaciones son posibles o no:
 - $S \subset T$.
 - $\dim(S + T) = 7$.
 - $\dim(S \cap T) = 4$.
 - $S \cap T = \{0\}$.
 - Si $\dim(S \cap T) = 3$, ¿qué puede decirse de S y T ?
 - Si $\dim(S + T) = 4$, ¿qué puede decirse de S y T ?
20. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \\ 5 & -5 \\ 9 & -9 \end{pmatrix}.$$

- hallar una base y la dimensión del espacio fila, del espacio columna y del núcleo.
 - calcular el rango.
 - repetir los ítems (a) y (b) para las respectivas matrices transpuestas.
21. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
- Si $m = 7$, $n = 8$ y $\text{rg}(A) = 2$, calcular $\dim(N(A))$.
 - Si $m = 6$, $n = 5$ y $\dim(N(A)) = 3$, calcular $\text{rg}(A)$.
 - Si $m = 3$, $n = 5$ y $\dim(E_C(A^t)) = 3$, calcular $\text{rg}(A)$ y $\dim(N(A))$.

22. Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 1 & 9 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

- Hallar una base y la dimensión de $E_C(A)$.
 - Calcular $\dim(N(A))$, $\dim(N(A^t))$, $\dim(E_F(A))$, $\text{rg}(A)$ y $\text{rg}(A^t)$.
23. Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ una matriz tal que $\dim(N(A)) = 1$ y sea $b \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$. Determinar el rango de la matriz ampliada $[A|b] \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ para que el sistema $A \cdot x = b$ tenga solución.

24. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & b \end{pmatrix}$.

- Determinar el valor de $b \in \mathbb{R}$ que hace que $\text{rg}(A) = 2$.
- Para el valor de b hallado, decidir si $v = (3, 2, 2) \in E_C(A)$ y hallar una base de $N(A^t)$.

25. Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & k+2 & 1 \\ -1 & k^2-7 & -1 & -2 \\ 1 & k^2-11 & 2k+7 & k-9 \end{pmatrix}.$$

- (a) Hallar **todos** los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $\dim(N(A)) = \dim(E_F(A^t))$.
 (b) Para cada k hallado, calcular una base de $N(A)$ y una base de $N(A^t)$.

26. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ y sean $B \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ y $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ dos matrices tales que $(A \cdot B) \cdot C = C \cdot (A \cdot B) = I$.

Calcular $\text{rg}(A \cdot B \cdot A)$ y $\dim(N(A \cdot B \cdot A))$, y hallar una base de $N(A \cdot B \cdot A)$.

27. Sean $P \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ y $Q \in \mathbb{R}^{5 \times 3}$ tales que $\text{rg}(P) + \dim(N(Q)) = 6$ y $\dim(E_F(P^t)) = 5$.

- (a) Calcular $\dim(N(P))$, $\text{rg}(P)$, $\dim(N(Q))$ y $\text{rg}(Q)$.
 (b) Calcular $\text{rg}(Q^t \cdot P^{-1})$.
 (c) Calcular $\dim[N((W \cdot P^{199})^t)]$, si $W \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$ es una matriz tal que $\dim(N(W)) = 3$.

28. Sean $A \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ y S el sistema $S : \begin{cases} ax + y + bz = 0 \\ 2ax - y + bz = 0 \end{cases}$.

Hallar $a, b \in \mathbb{R}$ tales que el subespacio $N(A)$ coincida con el espacio de soluciones de S .

29. Para cada uno de los siguientes subespacios S , hallar $m, n \in \mathbb{N}$, y $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tales que $N(A) = S$.

- (a) $S = \langle (1, 3, 1), (-2, 1, 0) \rangle$.
 (b) $S = \langle (1, 3, 1, -2), (-2, 1, 0, 3), (-1, 4, 1, 1) \rangle$.

30. Dados los subespacios de \mathbb{R}^4 , $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - 2x_2 + x_3 = -x_1 + 2x_2 + (\alpha + 2)x_3 + x_4 = 0\}$ y $T = \{x \in \mathbb{R}^4 : -x_1 + (\alpha^2 - 7)x_2 - x_3 + 2x_4 = x_1 + (\alpha^2 - 11)x_2 + (2\alpha + 7)x_3 + 2x_4 = 0\}$:

- (a) Calcular $\dim(S \cap T)$ en términos del valor $\alpha \in \mathbb{R}$.
 (b) Para cada α tal que $\dim(S \cap T) = 1$, hallar una base de $S \cap T$.
 (c) Para cada α tal que $\dim(S \cap T) = 2$, hallar una base de $S + T$.