ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (B) - Segundo cuatrimestre 2012

Práctica 4 - Geometría lineal

Operaciones vectoriales (II)

1. Determinar si los siguientes pares de vectores son ortogonales (perpendiculares) o no:

   (a) $\vec{v} = (1, 1)$; $\quad \vec{w} = (-2, 2)$.

   (b) $\vec{v} = (2, -3)$; $\quad \vec{w} = (0, 0)$.

   (c) $\vec{v} = (1, 1, 1)$; $\quad \vec{w} = (1, 0, 1)$.

   (d) $\vec{v} = (1, -2, 4)$; $\quad \vec{w} = (-2, 1, 1)$.

2. Hallar:

   (a) Tres vectores en el plano, distintos entre sí, que sean ortogonales al vector $\vec{v} = (2, 3)$. ¿Qué relación encuentra entre los vectores hallados? Graficar.

   (b) Todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ que son ortogonales a $\vec{v} = (2, -2)$ y tienen norma 1.

   (c) Tres vectores de $\mathbb{R}^3$, distintos entre sí, que sean ortogonales al vector $\vec{v} = (1, 3, -4)$.

   (d) Un vector de $\mathbb{R}^3$ que sea ortogonal a $\vec{v} = (-1, 0, 2)$ y de norma 2. ¿Es único?

   (e) Dos vectores ortogonales a $\vec{v} = (3, 2, 7)$ que no sean colineales (es decir, que no sean uno múltiplo del otro).

3. Hallar el ángulo que forman los siguientes pares de vectores:

   (a) $\vec{v} = (1, 0)$; $\quad \vec{w} = (0, 1)$.

   (b) $\vec{v} = (1, 1)$; $\quad \vec{w} = (0, 1)$.

   (c) $\vec{v} = (1, 2)$; $\quad \vec{w} = (-2, 1)$.

   (d) $\vec{v} = (1, -1, 0)$; $\quad \vec{w} = (0, 1, 1)$.

4. Dados $\vec{u} = (3, 2, -1)$ y $\vec{v} = (0, 1, 2)$ determinar:

   (a) el ángulo entre ambos vectores.

   (b) el módulo de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$.

5. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en $\mathbb{R}^3$ dos vectores que verifican $\|\vec{u}\| = 1$ y $\|\vec{v}\| = 3$. ¿Es posible que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$? Justificar.

6. Calcular el producto vectorial $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ para los siguientes pares de vectores:

   (a) $\vec{u} = (1, -2, -4)$; $\quad \vec{v} = (1, -2, -4)$.

   (b) $\vec{u} = (1, -2, -4)$; $\quad \vec{v} = (2, 1, -3)$.

   (c) $\vec{u} = (2, 1, -3)$; $\quad \vec{v} = (1, -2, -4)$.

   (d) $\vec{u} = (2, 0, 0)$; $\quad \vec{v} = (0, 0, 3)$.

   En cada caso, verificar que $\vec{w}$ es ortogonal tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{v}$.

7. Sean $\vec{u} = (1, 2, -3)$, $\vec{v} = (-1, 5, 2)$, $\vec{w} = (1, 2, 4)$ y $\vec{z} = (2, -4, 8)$. Hallar en $\mathbb{R}^3$:

   (a) un vector no nulo que sea, simultáneamente, ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. ¿Es único?

   (b) todos los vectores que son, simultáneamente, ortogonales a $\vec{w}$ y $\vec{z}$.

   (c) un vector de norma 2 que sea, simultáneamente, ortogonal a $\vec{w}$ y $\vec{z}$. ¿Es único?

Geometría lineal

1. En cada uno de los siguientes casos, decidir gráfica y analíticamente cuáles de los puntos pertenecen a la recta L:

(a) $L : t(-2,3) + (2,2)$
$P_1 = (2,2),\ P_2 = (-2,3),\ P_3 = (0,0),\ P_4 = (12,-13),\ P_5 = (2,-1).$

(b) $L : t(-1,1) + (3,-3)$
$P_1 = (3,-3),\ P_2 = (0,0),\ P_3 = (-1,1),\ P_4 = (3,4),\ \ P_5 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}).$

2. Graficar y dar una ecuación vectorial para la recta que:

   (a) pasa por $P = (-1,2)$ con vector director $v = (3,1)$.

   (b) pasa por $P = (1,-4)$ y $Q = (-1,-3)$.

   (c) es paralela a la recta $L :\ t(-2,3) + (1,-1)$ y pasa por $P = (1,-4)$.

   (d) es perpendicular a la recta $L :\ t(2,3) + (5,7)$ y pasa por el origen.

3. (a) Dar una ecuación vectorial para cada una de las siguientes rectas en $\mathbb{R}^2$:

   i. $y = -2x + 1$. iii. $y = -2$.
   ii. $2x - 3y = 5$. iv. $x = 3$.

   (b) Dar una ecuación implícita para cada una de las siguientes rectas en $\mathbb{R}^2$:

   i. $L : t(3,2) + (1,1)$. ii. $L : t(2,0) + (-1,3)$. iii. $L : t(0,-1) + (2,1)$.

4. En cada uno de los siguientes casos, dar una ecuación vectorial para la recta que:

   (a) está dirigida por $v = (0,1,0)$ y pasa por $P = (0,2,4)$.

   (b) pasa por los puntos $P = (-2,3,4)$ y $Q = (-1,3,1)$.

   (c) es paralela al eje z y pasa por $P = (1,2,3)$.

   (d) es perpendicular a la recta $L :\ t(1,-2,1) + (3,5,7)$ y pasa por $P = (1,9,-3)$. ¿Es única?

5. Dar la ecuación vectorial del plano dirigido por v y w que pasa por el punto P en los siguientes casos:

   (a) $v = (0,1,0)$, $w = (1,0,0)$, $P = (0,0,1)$.

   (b) $v = (0,2,0)$, $w = (1,1,0)$, $P = (-1,2,1)$.

   Graficar los planos y compararlos.

6. (a) Dar una ecuación implícita para el plano $\pi : t(1,1,0) + s(0,-1,2) + (-2,0,4)$.

   (b) Dar una ecuación vectorial para el plano $\pi : -x + 3y + 2z = 1$.

7. Dar una ecuación paramétrica y una ecuación implícita para el plano que:

   (a) pasa por los puntos $(2,1,2)$, $(1,1,1)$ y $(3,2,7)$.

   (b) pasa por el punto $(1,2,1)$ y es paralelo al plano que contiene a los ejes x e y.

   (c) es paralelo a la recta $L :\ t(1,2,-4) + (1,2,1)$ y contiene a los puntos $P = (2,2,1)$ y $Q = (1,2,-3)$.

   (d) contiene al punto $(-1,2,2)$ y es ortogonal a la recta $L :\ t(1,1,-1) + (-1,2,2)$.

8. (a) Decidir si los puntos $A = (1,1,1)$, $B = (-2,0,1)$ y $C = (3,0,2)$ son colineales (están sobre una misma recta) o no.

   (b) Decidir si los puntos $A = (8,2,4)$, $B = (4,2,8)$, $C = (-2,0,1)$ y $D = (1,-1,3)$ son coplanares (están sobre un mismo plano) o no.

9. Dado el plano $\pi :\ 2x - 5y + 3z = 11$:

(a) Hallar **todos** los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $(2a, a, 7) \in \pi$.
(b) Decidir si existe algún valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que $(1, 3a, 5a) \in \pi$.

10. Sean $\pi : 2x - y + 3z = 5$, $L : t(1, -1, -1) + (1, 0, -2)$ y $L' : t(3, 5, 1) + (0, 1, 2)$. Calcular $L \cap \pi$ y $L' \cap \pi$.

11. Determinar si las rectas L y L' resultan concurrentes, paralelas/coincidentes o alabeadas:

    (a) $L : \ t(1, 0, -1) + (-1, 1, 2), \quad L' : \ t(-1, 1, 2) + (1, 0, -1)$.
    (b) $L : \ t(1, 1, -1) + (-1, 2, 2), \quad L' : \ t(2, 2, -2) + (1, 0, -1)$.
    (c) $L : \ t(1, \frac{1}{2}, -1) + (-1, 1, 2), \quad L' : \ t(-2, -1, 2) + (3, 3, -2)$.
    (d) $L : \ t(1, 2, -1) + (-1, -1, 2), \quad L' : \ t(-1, 1, 1) + (3, 2, -1)$.

    En cada caso determinar si existe un plano que contenga a L y L'. Si la respuesta es afirmativa, hallarlo.

12. Determinar en qué casos los planos π_1 y π_2 se intersecan y hallar la intersección.

    (a) $\pi_1 : \ 4x + 2y - 3z = 1; \quad \pi_2 : \ 2x + y - \frac{3}{2}z = 1$.
    (b) $\pi_1 : \ 3x - 2y - 1 = 0; \quad \pi_2$ el plano dirigido por $(0, 0, 1)$, $(2, 3, 3)$ que pasa por $(1, 1, 2)$.
    (c) π_1 el plano que pasa por $(-1, 1, 2)$ con vector normal $(1, 2, -1)$;
    π_2 el plano que pasa por $(1, 1, 1)$, $(2, 3, 1)$ y $(-1, -2, 2)$.

13. Hallar ecuaciones implícitas para cada una de las rectas siguientes (es decir, describirlas como intersección de dos planos dados por ecuaciones implícitas):

    (a) L que es intersección del plano xy con el plano yz.
    (b) $L : \ t(1, 0, -1) + (-1, 1, 2)$.
    (c) L que pasa por los puntos $(-5, 3, 7)$ y $(2, -3, 3)$.

14. En cada uno de los siguientes casos, hallar la intersección de las rectas L y L':

    (a) $L : t(1, 1, 0) + (0, -1, 2), \quad L' : \begin{cases} x - y + z = 3 \\ -2x + y + z = -2 \end{cases}$.

    (b) $L : t(1, 1, 0) + (0, -1, 2), \quad L' : \begin{cases} x - y + z = 3 \\ -2x + 2y + z = 2 \end{cases}$.

15. Sean L_1 y L_2 las rectas de $\mathbb{R}^2$, $L_1 : x - y = 1$, y $L_2 : x + y = 3$.

    (a) Calcular el ángulo entre L_1 y L_2.
    (b) Hallar una recta L_3 tal que $\angle(L_1, L_3) = \angle(L_2, L_3)$ y $L_1 \cap L_2 \in L_3$.

16. Sean $L_1 : t(1,-2,1)+(0,0,-2)$ y L_2 la recta que pasa por $(1,4,2)$ y $(0,2,-1)$.
   (a) Verificar que $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$.
   (b) Hallar un plano que contenga a L_1 y L_2 y determinar el ángulo entre L_1 y L_2.

17. Sea L_1 la recta que tiene dirección $(1,2,-1)$ y pasa por $(-1,3,1)$, y sea L_2 la recta que pasa por $(-1,1,3)$ y por $(1,2,7)$.
   (a) Verificar que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.
   (b) Determinar una recta L_3 paralela a L_1 que interseque a L_2 en el punto $(-1,1,3)$ y hallar el ángulo entre L_3 y L_2.

18. Encontrar **todos** los puntos de la recta $L:\ t(1,-1,0)+(2,1,-1)$ que están a distancia 6 del punto $P=(2,1,-1)$.

19. Calcular la distancia entre:
   (a) la recta $L:\ t(1,1)+(3,0)$ y el punto $P=(-1,1)$.
   (b) la recta $L:\ t(1,1,0)+(3,0,0)$ y el punto $P=(-1,1,0)$.
   (c) el plano π que pasa por $(1,2,1)$ y tiene vector normal $(1,-1,2)$ y el punto $P=(1,2,5)$.

20. Sean $L : t(2,-2,-3)+(0,2,2)$ y $P=(0,-2,-1)$.
   (a) Hallar el plano π perpendicular a L que pasa por P y determinar $Q = L\cap\pi$.
   (b) Calcular $d(P,Q)$. ¿Qué significa en este problema el número $d(P,Q)$?

21. Se consideran las rectas $L_1 : \begin{cases} 2x-y-z &= 4 \\ 4x-y-2z &= 9 \end{cases}$ y $L_2:\ t(1,0,2)+(1,2,-3)$.
   (a) Probar que L_1 y L_2 son paralelas.
   (b) Hallar un plano π perpendicular a L_2 que pase por $P=(1,2,-3)$ y determinar $Q = L_1 \cap \pi$.
   (c) Calcular $d(P,Q)$. ¿Qué significa el número $d(P,Q)$ en este problema?

22. Sean π el plano de ecuación $x+y+z=1$ y L la recta $L : t(-1,0,1)+(1,1,2)$.
   (a) Probar que L es paralela a π.
   (b) Hallar una recta L' ortogonal a π que pase por $P=(1,1,2)$ y determinar $Q = L'\cap\pi$.
   (c) Calcular $d(P,Q)$. ¿Qué significa el número $d(P,Q)$ en este problema?