

ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (B) - Segundo cuatrimestre 2012

Práctica 3 - Matrices

- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular:
 - $A + 3B - 3C$.
 - $A + 3(B - C)$.
 - $A - (B - 2C)$.
 - $A - B + 2C$.
- Se consideran matrices de los siguientes tamaños: $A \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$, $B \in \mathbb{R}^{5 \times 7}$, $C \in \mathbb{R}^{7 \times 5}$. Indicar cuáles de las siguientes operaciones son posibles. En caso afirmativo, indicar el tamaño (número de filas y de columnas) de la matriz resultado.
 - $A \cdot B$.
 - $B \cdot A$.
 - $B \cdot C$.
 - $C \cdot B$.
 - $A \cdot B \cdot C$.
 - $B \cdot C \cdot A$.
 - $A \cdot A$.
 - $B \cdot C \cdot B \cdot C$.
- Cuando sea posible, calcular $A \cdot B$ y $B \cdot A$. ¿Vale la igualdad entre estos productos?
 - $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
 - $A = (1 \ 2 \ 3)$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.
- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular:
 - A^2 .
 - B^3 .
 - $-2A^2 + B^3A$.
- Mostrar, dando un contraejemplo, que la propiedad " $A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0$ ó $B = 0$ " no es válida para matrices.
- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ analizar si son válidas (para matrices) las fórmulas clásicas de factorización:
 - $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$.
 - $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
- Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calcular:
 - A^t y B^t .
 - $(A \cdot B)^t$ y $B^t \cdot A^t$.

8. Dar ejemplos, si existen, de matrices $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tales que $A \neq 0$ y $A \neq I$ (distinta de la matriz nula y de la matriz identidad) que cumplan:

- (a) $A^2 = I$. (c) $A^2 = A$.
(b) $A^2 = 0$. (d) $A \cdot B = B \cdot A$ para toda matriz $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

9. Dada una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, calcular los siguientes productos y analizar el resultado en términos de la matriz A . ¿Qué cambios producen los productos en la matriz A ?

- (a) $A \cdot \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \cdot A$. (c) $A \cdot \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A$.
(b) $A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A$. (d) $A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \cdot A$.

10. Calcular, si es posible, la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices verificando que la matriz hallada es efectivamente la inversa.

- (a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. (e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.
(b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. (d) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. (f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Verificar que las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ son inversibles y calcular:

- (a) A^{-1} y B^{-1} .
(b) $(AB)^{-1}$ y $B^{-1} \cdot A^{-1}$.

12. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, verificar que:

- (a) si $ad - bc \neq 0$, entonces A es inversible con inversa $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
(b) si $ad - bc = 0$, entonces A no es inversible.

13. Considerar el sistema lineal

$$S: \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Reescribir el sistema como producto de matrices (notación matricial). Hacer lo mismo para el sistema homogéneo asociado.

14. Reescribir, mostrando las ecuaciones, el sistema lineal $A \cdot \bar{x} = b$ en cada uno de los siguientes casos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & -5 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

15. En cada uno de los siguientes casos hallar **todas** las matrices $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ o $X \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, según corresponda, tales que:

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(b) X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}. \quad (d) \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

16. Hallar **todas** las matrices $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ que verifican $A \cdot X + 2X = B^t \cdot X + \frac{1}{2}C$ para

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

17. Hallar **todas** las matrices $X \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ que verifican $A \cdot X = 2X + B^t$ para

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$