Método de las potencias para el cálculo de autovalores de una matriz

Cálculo Numérico (A-F-O)/Elementos de Cálculo Numérico (M)

Segundo Cuatrimestre 2012

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalizable (i.e., existe una base de autovectores) con la propiedad que tiene un solo valor propio de módulo máximo, entonces podemos ordenar sus autovalores de la siguiente manera:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

Consideramos un vector $v \in \mathbb{R}^n$, cualquiera no nulo, y la sucesión dada por

$$v_k = A^k v'$$

Aunque en general **no vale** que $v_k \to w$, lo que sí es cierto es que a medida que $k \to +\infty$, los vectores v_k se van alineando con el autovector w del autovalor 1, con la única limitación que el vector inicial no sea ortogonal a w (para la demostración ver Kincain, Análisis Numérico, pg 234 en adelante).

A partir de esto podemos obtener el valor de λ_1 mediante el cociente de Rayleigh:

$$\lambda_1 = frac\langle Aw, w\rangle\langle w, w\rangle.$$

Un método práctico para el cálculo de w y de λ_1 es, sabiendo que $v_k = \lambda_1^k(w + \varepsilon^k)$, (donde $\varepsilon^k \to 0$), podemos considerar una función lineal cualquiera $\phi(x)$ (por ejemplo la que evalúa una coordenada de un vector), entonces

$$r_k := \frac{\phi(v_{k+1})}{\phi(v_k)} = \lambda_1 \frac{\phi(w) + \phi(\varepsilon^{k+1})}{\phi(w) + \phi(\varepsilon^{k+1})} \to \lambda_1. \tag{1}$$

En la implementación práctica también conviene ir normalizando los v_k para descartar los casos en que los v_k convergen a 0, o divergen en módulo.

Matrices simétricas Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica y supongamos que tiene sus n autovalores de distintos módulos $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n| \geq 0$ entonces por el método antes descripto podemos calcular λ_1 y w_1: Queremos hallar un método que nos permita calcular los otros autovalores. Para esto usamos el siguiente resultado:

Si A es como en el párrafo anterior, definimos $v_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}$ entonces la matriz

$$A - \lambda_1 v_1 v_1^t$$

es simétrica y tiene por autovalores a $0, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ (verifíquelo). Además, si v_2 es el autovector de B asociado al autovalor λ_2, es también autovector de A asociado al mismo autovalor.

Por lo tanto, para calcular λ_2 podemos aplicarle el método a B: ¡Cómo seguiría para calcular λ_3 y todos los demás autovalores?.

Aceleración (Aitken)

Si $(r_k)_k$ es la sucesión de (1), consideremos la nueva sucesión

$$s_k = \frac{r_k r_{k+2} - r_{k+1}^2}{r_{k+2} - 2r_{k+1} + r_k}.$$

La sucesión $s_k \to \lambda_1$ y lo hace más rápido que r_k.

Ejemplos

En cada uno de los siguientes casos encuentre el autovalor de módulo mayor y su correspondiente autovector. Si la matriz es simétrica encuentre todos los autovalores. Muestre en una tabla como se comporta el error del método e intente deducir empíricamente cuál es el orden del mismo. Repita la estimación para la sucesión de Aitken:

1. $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, comenzando en $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sugerencia: tome como función lineal para el cálculo práctico a $\phi(x_1, x_2, x_3) = x_2$.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Elija el vector inicial v y la función ϕ.