Ecuaciones en Derivadas Parciales
Método de líneas II

Cálculo Numérico (A-F-O)/Elementos de Cálculo Numérico (M)

Segundo Cuatrimestre 2012

Considerar la ecuación en derivadas parciales:

$$u_t = u_{xx} \tag{1}$$

llamada ecuación del calor, para $x \in [0,1]$, con condiciones de contorno

$$u(0,t) = 0 \qquad\qquad u(1,t) = 0 \tag{2}$$

y dato inicial

$$u(x,0) = \sin(\pi x) \tag{3}$$

Esta ecuación refleja la evolución de la temperatura en una barra que ocupa el segmento [0,1], sin pérdidas laterales de calor, y con una temperatura inicial dada por 3. Además los extremos se mantienen a temperatura igual a cero para todo t. El problema con este tipo de condiciones de contorno se denomina problema de Dirichlet. Si en vez de 2 se tienen datos sobre las derivadas:

$$u_x(0,t) = 0 \qquad\qquad u_x(1,t) = 0 \tag{4}$$

se tiene el llamado problema de Neumann.

i) Para el problema de Dirichlet, convierta el problema con la ecuación en derivadas parciales en un problema para un sistema de ecuaciones ordinarias, de la siguiente manera:

Defina una grilla $0 = x_0 < \ldots < x_n = 1$, y defina las funciones incógnita $\phi_i(t)$, $i = 0, \ldots, n$, como los valores de la solución $\phi_i(t) = u(x_i, t)$. Verifique discretizando la ecuación 1 que se obtiene un sistema de ecuaciones ordinarias para las ϕ_i, $0 < i < n$. Las condiciones 2 ó 4 pueden ser usadas para generar ecuaciones para ϕ_0 y ϕ_n respectivamente.

ii) Utilice esta técnica para resolver el problema 1, con dato inicial $u(x,0) = \sin(\pi x)$, y condiciones de contorno 2. Obtenga la solución exacta de este problema, y compare los valores obtenidos para $t = 1$.

iii) Analice cómo depende el tiempo de integración del paso de la malla h. ¿Qué observa? ¿A qué se debe? Trate de implementar un algoritmo que no sufra estos problemas, y repita los cálculos con él.