Oscilaciones de una membrana cuadrada I

Cálculo Numérico (A-F-O)/Elementos de Cálculo Numérico (M)

Segundo Cuatrimestre 2012

El problema de la oscilación de una membrana cuadrada fija por sus bordes, puede ser descripto, al menos para pequeñas elongaciones, por la ecuación de ondas:

$$u_{tt} = c^2 \triangle u \qquad (x, y) \in \Omega = [0, 1] \times [0, 1]$$

con condición de contorno:

$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

Los datos iniciales adecuados son por ejemplo la posición inicial de la membrana, y su velocidad.

i) Discretice el dominio con una malla $(x_i, y_j) = (i/N, j/N)$, $0 \leq i, j \leq N$, y el tiempo $t_k = kdt$. Siendo las incógnitas $u^n_{i,j} = u(x_i, y_j, t_n)$, los valores de la función en los nodos de la malla, la ecuación puede discretizarse

$$u^{n+1}_{i,j} + u^{n-1}_{i,j} - 2u^n_{i,j} = \frac{c^2 dt^2}{h^2} \left[u^n_{i+1,j} + u^n_{i-1,j} - 2 + u^n_{i,j+1} + u^n_{i,j-1} - 4u^n_{i,j} \right] \quad (1)$$

donde $h = 1/N$. Por lo tanto, suponiendo conocidos la posición de la membrana en a tiempo 0 y a tiempo $-dt$, se puede calcular la posición para cualquier t_k posterior. La solución a tiempo cero se conoce por el dato inical. La condición inicial en la derivada respecto del tiempo le permite plantear una ecuación adicional

$$u^1_{i,j} - u^{-1}_{i,j} = 2dt \frac{du}{dt}(x_i, y_i, t_0)$$

de la cual despejar el valor de $u^{-1}_{i,j}$. Reemplazando este valor en la ecuación 1, para $n = 0$, se obtiene el valor de u_1.

ii) Escriba un programa que resuelva el problema de la membrana, con dato de contorno 0, y para datos iniciales cualesquiera. Grafique las soluciones para algunos casos que le interesen.

iii) Calcule la solución a tiempo 1 correspondiente a una membrana con posición inicial

$$u_0(x, t) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \qquad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

y velocidad inicial cero. Comparando con la solución exacta $u(x, y, t) = \sin(\sqrt{2}\pi ct) \sin(\pi x) \sin(\pi y)$, grafique los errores en función de h, dt. ¿Cuál es el orden de convergencia del método?

iv) Si se anima, calcule las autofunciones del problema (esto le va a dar los modos normales de oscilación). Hasta podría hacer una animación, para ver la oscilación en el tiempo.... ¡Consulte!