Un sistema autónomo de segundo orden

Cálculo Numérico (A-F-O)/Elementos de Cálculo Numérico (M)

Segundo Cuatrimestre 2012

Consideremos el problema de un planeador en el plano vertical xz, suponiendo que la fuerza de resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad de vuelo, y que el ángulo de ataque del planeador es independiente del régimen de vuelo. Con estas suposiciones, los coeficientes aerodinámicos de la fuerza de resistencia del aire C_1 y de la fuerza de sustentación de las alas del planeador C_2 son constantes. Escribiendo las ecuaciones de movimiento del centro de masa del planeador, proyectando sobre la tangente y la normal a la trayectoria, se tiene:

$$\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= -mg\sin(\theta) - \tfrac{1}{2}\rho S C_1 v^2 \\ mv\frac{d\theta}{dt} &= -mg\cos(\theta) + \tfrac{1}{2}\rho S C_2 v^2 \end{aligned} \tag{1}$$

donde m es la masa del planeador, S la superficie de las alas, ρ es la densidad del aire, g la aceleración de la gravedad, y donde las incógnitas son v el módulo de la velocidad, y θ el ángulo que forma la tangente a la trayectoria con el eje de las x.

Introduciendo las magnitudes adimensionales (verificar)

$$y = v\sqrt{\frac{\rho S C_2}{2mg}} \qquad \tau = t\sqrt{\frac{\rho g S C_2}{2m}} \qquad a = \frac{C_1}{C_2}$$

se pueden reescribir las ecuaciones (1) en la forma

$$\dot{y} = -\sin(\theta) - ay^2 \qquad \dot{\theta} = \frac{y^2 - \cos(\theta)}{y} \tag{2}$$

Notar que las trayectorias sólo dependen del parámetro positivo a. Considere sólo la región $y \geq 0$ (correspondiente al planeador avanzando para adelante).

i) Suponga $a = 0$ (no hay rozamiento). Halle numéricamente las trayectorias del sistema en la superficie del cilindro. Identifique puntos de equilibrio, y confírmelos analíticamente. Si puede hallar analíticamente las trayectorias, hágalo. Identifique cada uno de los diferentes regímenes de vuelo.

ii) Suponga ahora $a > 0$. Realice numéricamente un mapa de las trayectorias del sistema en la superficie del cilindro, para varios valores de a, e identifique nuevos puntos de equilibrio. Halle analíticamente la posición de dichos puntos de equilibrio. Describa las trayectorias posibles, ¿El planeador tiende a comportarse de algún modo particular? Identifique las trayectorias estables.