

Ecuaciones de oscilación no lineal

Ecuación de Duffing I

Cálculo Numérico (A-F-O)/Elementos de Cálculo Numérico (M)

Segundo Cuatrimestre 2012

Se llama ecuación de Duffing a la ecuación diferencial:

$$x'' + \delta x' - x + x^3 = \gamma \cos(\omega t) \quad (1)$$

que refleja las oscilaciones de un resorte no lineal, sometido a la acción de una fuerza periódica de frecuencia ω e intensidad γ . El resorte está sometido a rozamiento, proporcional a la velocidad, de acuerdo con el término $\delta x'$.

i) Verificar que la ecuación dada corresponde a la situación física descrita.

ii) Escribir la ecuación 1 en la forma de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

iii) Escribir un programa que integre el sistema del punto anterior, para cada conjunto de valores δ , γ , ω . Utilizar para ello la rutina RKF45, o bien hacerlo con MATLAB o MATHEMATICA.

iv) Integre con algún dato inicial, por ejemplo $x(0) = 1.8$, $x'(0) = 0$, para los valores:

$$\gamma = 0.3 \quad \omega = 1. \quad \delta = 0.15$$

Realice la integración por un tiempo suficientemente largo. ¿Qué observa? Es muy útil graficar la evolución en el espacio de fases, es decir, graficando x' en función de x . Hágalo. ¿Cuál es el período de la órbita periódica alcanzada? Realice también dibujos de la dependencia temporal de $x(t)$, y de trayectorias en el espacio de fases que tiendan hacia la solución periódica. Interprete.

v) Realice el análisis anterior con los datos

$$\gamma = 0.3 \quad \omega = 1. \quad \delta = 0.22$$

Compare. ¿Cuál es el nuevo período de la solución periódica obtenida?

vi) Trate de obtener una solución periódica con los valores:

$$\gamma = 0.3 \quad \omega = 1. \quad \delta = 0.24$$

¿Qué pasa? ¿Puede asegurarse que no existe la solución periódica asintótica?

vii) Para los tres casos anteriores, halle la transformada de Fourier de las soluciones $x(t)$, e interprete.