

PRÁCTICA 6 -TEOREMAS DE PUNTO FIJO Y BAIRE-

Punto Fijo

Ejercicio 1. Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $f : X \rightarrow X$. Probar que la condición

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \quad \forall x, y \in X, \quad x \neq y,$$

no es suficiente para garantizar la existencia de un punto fijo de f , pero que sí lo es si X es compacto.

Ejercicio 2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable tal que $|f'(x)| \leq \alpha < 1$. Probar que f tiene un único punto fijo.

Ejercicio 3. Considere la siguiente ecuación integral no lineal,

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y; f(y)) dy + \varphi(x),$$

con K y φ continuas, tal que K satisface la condición de Lipschitz en la tercer variable:

$$|K(x, y; z_1) - K(x, y; z_2)| \leq M|z_1 - z_2|.$$

Probar que la ecuación integral tiene solución única para todo

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}.$$

Muestre una sucesión que converja a la solución.

Ejercicio 4. Sea $f : [0, T] \times \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua y Lipschitz en la segunda variable.

- i) Probar que $y \in (C[0, T], \Omega)$ es solución de la ecuación diferencial $y'(t) = f(t, y(t))$ con la condición inicial $y(0) = y_0$ si y sólo si

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s)) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

- ii) Probar que si T es suficientemente pequeño, existe una única solución de este problema.

Ejercicio 5. Sea X un espacio métrico completo y sea $T : X \rightarrow X$ tal que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que T^n es una contracción. Entonces existe un único $x \in X$ tal que $T(x) = x$.

Ejercicio 6.

- i) Probar que existe una única función continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que es solución de la siguiente ecuación integral

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x, y) f(y) dy + \phi(x),$$

donde $K : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas.

- ii) Sea $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ continua. Probar que las soluciones de

$$x'(t) = A(t)x(t)$$

están definidas para todo tiempo t .

Ejercicio 7. Sea X un espacio métrico completo y $S \subset X$ un subespacio. Si $f : S \rightarrow S$ es una contracción, probar que existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S$ tal que $\lim x_n = \lim f(x_n)$.

Baire

Ejercicio 8. Probar que $\mathbb{R}^n$ no puede escribirse como unión numerable de subespacios vectoriales propios.

Ejercicio 9. Sean (X, d) un espacio métrico completo sin puntos aislados y sea D un subconjunto denso y numerable de X . Probar que D no es un G_δ .

Ejercicio 10. Demostrar que no existe ninguna función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que sea continua sólo en los racionales.

Sugerencia: Para cada $n \in \mathbb{N}$ considerar

$$U_n = \left\{ x \in \mathbb{R} / \exists U \subseteq \mathbb{R} \text{ abierto con } x \in U \text{ y } \text{diam}(f(U)) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Ejercicio 11. Sea $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de intervalos de $[0, 1]$ con extremos racionales y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$E_n = \{ f \in C[0, 1] / f \text{ es monótona en } I_n \}.$$

- i) Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$, E_n es cerrado y nunca denso en $(C[0, 1], d_\infty)$.
- ii) Deducir que existen funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$ que no son monótonas en ningún subintervalo.

Ejercicio 12. Sea (X, d) espacio métrico. Se dice que un conjunto $A \subset X$ es *nunca denso* si $\overline{A}^\circ = \emptyset$.

1. Probar que si A es nunca denso, entonces $X - A$ es denso. ¿Vale el recíproco?
2. Probar que si A es abierto y denso, entonces $X - A$ es nunca denso.

Ejercicio 13. Sea (X, d) espacio métrico y $A \subset X$. Probar que son equivalentes:

1. A es nunca denso;
2. toda bola B abierta contiene otra $B_1 \subset B$ abierta tal que $B_1 \cap A = \emptyset$;
3. A no es denso en ninguna bola abierta.

Ejercicio 14. Sea $Lip[a, b] = \{f \in C[a, b] / \exists k > 0, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|\}$. Probar que $Lip[a, b]^\circ = \emptyset$ en $C[a, b]$.

Ejercicio 15. Probar que, si A es el conjunto de funciones continuas que tienen algún intervalo de monotonía, entonces A tiene interior vacío en $C[a, b]$.