

PRÁCTICA 0: CONJUNTOS Y REPASO DE LA INTEGRAL DE RIEMANN

Ejercicio 1. Sea $f : E \rightarrow F$ una función. Sean $(X_i)_{i \in I}$ y $(Y_j)_{j \in J}$ dos familias de subconjuntos de E y F respectivamente. Probar que

$$(a) \quad f\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(X_i)$$

$$(b) \quad f\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(X_i)$$

$$(c) \quad \text{Si } f \text{ es inyectiva, entonces } f\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) = \bigcap_{i \in I} f(X_i)$$

$$(d) \quad f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} Y_j\right) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(Y_j)$$

$$(e) \quad f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} Y_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(Y_j)$$

Ejercicio 2. Dada una sucesión $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de E , se define:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} E_k \quad (\text{límite inferior})$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} E_k \quad (\text{límite superior})$$

Probar que

$$(a) \quad E - \liminf_{n \rightarrow \infty} E_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} (E - E_n)$$

$$(b) \quad E - \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} (E - E_n)$$

$$(c) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} E_n \subseteq \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n$$

Si $\liminf_{n \rightarrow \infty} E_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n$, entonces se dice que existe el límite de la sucesión $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y a este conjunto se lo denota por $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n$. Probar que

$$(d) \quad \text{Si } E_{n+1} \subseteq E_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ entonces } \lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$$

$$(e) \quad \text{Si } E_n \subseteq E_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$$

(f) Dada una sucesión $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de un conjunto E se define

$$\begin{cases} D_1 = \emptyset \\ D_{n+1} = D_n \triangle E_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Probar que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n$ si y sólo si $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \emptyset$.

Ejercicio 3. Sea X un conjunto. Para cada subconjunto $A \subseteq X$ se define $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

- (a) $A \subseteq B \Leftrightarrow \chi_A(x) \leq \chi_B(x) \forall x \in X$
- (b) $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x) \forall x \in X$
- (c) $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A \cap B}(x) \forall x \in X$

Ejercicio 4. Sea $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X y $f : X \rightarrow Y$ una función. Probar que

- (a) $f(\liminf_{n \rightarrow \infty} E_n) \subseteq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(E_n)$
- (b) $f(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n) \subseteq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(E_n)$
- (c) $f(\liminf_{n \rightarrow \infty} E_n) \subseteq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(E_n)$
- (d) Si f es inyectiva, en (a) y (b) vale la igualdad.

Ejercicio 5. Repaso de la integral de Riemann Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Para cada partición $\pi : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ de $[a, b]$ consideramos las sumas inferior y superior de Riemann, definidas respectivamente por:

$$s_\pi(f) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \quad S_\pi(f) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$$

donde

$$m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \quad M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$$

Consideramos los números:

$$I = \sup\{s_\pi(f) : \pi \text{ partición de } [a, b]\} \quad (\text{integral inferior})$$

$$S = \inf\{S_\pi(f) : \pi \text{ partición de } [a, b]\} \quad (\text{integral superior})$$

Finalmente, decimos que f es integrable Riemann en $[a, b]$ si $I = S$, y en ese caso definimos

$$\int_a^b f(x) dx \text{ (según Riemann)} = I = S$$

Probar las siguientes afirmaciones:

- i) Una función es integrable Riemann en $[a, b]$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ es posible encontrar una partición π de $[a, b]$ tal que $S(\pi, f) - s(\pi, f) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(x_{i+1} - x_i) < \varepsilon$, siendo $\omega_i = M_i - m_i$ la oscilación de f en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$.
- ii) Toda función monótona es integrable Riemann.
- iii) Toda función continua en $[a, b]$ es integrable Riemann.
- iv) $\chi_{\mathbb{Q}}$ (función de Dirichlet) no es integrable Riemann.
- v) Si $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una sucesión de funciones integrables Riemann en $[a, b]$ y $f_n \rightarrow f$ uniformemente en $[a, b]$, entonces f es integrable Riemann en $[a, b]$, y se verifica que:
- $$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx (R) = \int_a^b f(x) dx (R)$$
- vi) Dar un ejemplo de una sucesión de funciones f_n integrables Riemann en $[a, b]$ tales que f_n esté uniformemente acotada en $[a, b]$ y converja puntualmente en $[a, b]$ a una función f que no sea integrable Riemann en $[a, b]$.