ANALISIS NUMERICO — Práctica 2

Segundo Cuatrimestre de 2012

Ejercicio 1 Sea a una constante positiva.

1. Resuelva la ecuación $U_t + aU_x = 0$, en toda la recta, con dato inicial $u(x, 0) = u_0(x)$.
2. Proceda análogamente con $U_t - aU_x = 0$.
3. Reemplace $e^{i(kx+\omega t)}$ en ambas ecuaciones y halle ω en cada caso. Concluya que ningún modo es amortiguado y que en un lapso Δt su fase cambia en $-ak\Delta t$.

Ejercicio 2 Considerar la ecuación $U_t+aU_x = 0$. Decidir para qué valores de los parámetros de discretización en x y en t son estables los métodos explícito e implícito de primer orden en x y en t, discretizando la derivada espacial corriente arriba (up-wind).

Ejercicio 3 Verifique que el esquema explícito con up-wind para la ecuación

$$U_t + U_x = 0$$

puede escribirse como:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = \frac{\Delta x}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

observe que esta expresión da un esquema centrado en x para

$$U_t + U_x = \frac{\Delta x}{2} U_{xx}$$

Concluya que el método up-wind puede interpretarse como un esquema centrado en x para la ecuación de transporte al cual se le agrega "difusión artificial". Compare el orden del esquema up-wind con la de este último. Encuentra alguna contradicción?

Ejercicio 4 Demostrar el siguiente resultado. Si $q(x) \approx c_1x + c_2x^2 + c_3x^3...$ para $x \approx 0$ entonces

$$arctg(q(x)) = c_1x + c_2x^2 + (c_3 - \frac{1}{3}c_1^3)x^3...$$

si $x \approx 0$.

Ejercicio 5 Analice los modos de Fourier cuando se utiliza up-wind. Estudie los errores del factor de amortiguamiento $\lambda(k)$ y de fase para el k-ésimo modo. Resuelva numéricamente el problema $U_t + U_x = 0$, $U(0, t) = 0$, $U(x, 0) = U_0$. Para,

a) $U_0 = \chi_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]}(x)$, b) $U_0 = \chi_{[0,\frac{1}{2}]}(x)$ c) $U_0 = \chi_{[0,\frac{1}{2}]}(x)\sin(2\pi x)$ d) $U_0 = e^{-10(4x-1)^2}$.

Grafique la solución numérica vs. la exacta para distintos valores de tiempo y compare con los resultados obtenidos. Analice los casos $\nu = 1$, $\nu = 0,5$, $\nu < 0,5$ y $\nu > 0,5$.

Ejercicio 6 Considere $a > 0$ constante. Se define el método de Lax-Wendroff

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}a\nu(1 + a\nu)u_{j-1}^n + (1 - a^2\nu^2)u_j^n - \frac{1}{2}a\nu(1 - a\nu)u_{j+1}^n \qquad \nu = \frac{\triangle t}{\triangle x}$$

para aproximar las soluciones de

$$U_t + aU_x = 0$$

Halle el error de truncado. Analice la estabilidad por el método de Fourier y realice un análisis similar al del ejercicio anterior con los modos de Fourier. Resuelva numéricamente los mismos problemas allí propuestos con este esquema y para distintos valores de ν y Δx. Compare. ¿Qué observa en cada caso?

Ejercicio 7 Considere la ecuación diferencial

$$U_t + aU_x = 0$$

realize un estudio similar al de los ejercicios **??** y **??**, para el esquema (Box Scheme)

$$\frac{1}{2}\frac{(u_j^{n+1} - u_j^n) + (u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n)}{\Delta t} + a\frac{1}{2}\frac{(u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}) + (u_{j+1}^n - u_j^n)}{\Delta x} = 0$$

Piense cómo "despejar" el término de la capa $n+1$. Puede intuir el despeje correcto utilizando la condición CFL. Estudie qué tipo de condiciones de contorno necesita el esquema.

Ejercicio 8 Para la ecuación $U_t + U_x = 0$, se propone el esquema

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + (1 - \alpha)\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} + \alpha\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0$$

con $0 \leq \alpha \leq 1$

1. Hallar el error de truncado. Para que valores de α se tiene el mayor orden?
2. Analice que restricción debe imponerse sobre $\nu = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ para que se satisfaga la condición CFL. Hay algun α para el cual la condición CFL no se cumple independientemente de la elección de ν?
3. Analice la estabilidad de los métodos correspondientes a $\alpha = 0$ y $\alpha = \frac{1}{2}$.

Ejercicio 9 Analizar la estabilidad de la ecuación en diferencias obtenida discretizando por diferencias centradas la parte espacial y con un método explícito de primer orden en t la ecuación diferencial:

$$U_t + aU_x = bU_{xx} \qquad a > 0,\ b > 0$$

¿Coinciden los resultados con los que corresponden a los casos límite $a = 0$ (problema sin convección) y $b = 0$ (problema sin difusión)?

Ejercicio 10 i) Probar que las soluciones de la ecuación

$$U_t + f(U)_x = 0 \qquad x \in [a, b]$$

satisfacen:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b U dx = f(U(t, a)) - f(U(t, b))$$

ii) Probar que la discretización

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + \frac{f(u_i^n) - f(u_{i-1}^n)}{h} = 0$$

satisface una relación análoga.
iii) Analizar qué ocurre con la discretización:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + f'(u_i^n)\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} = 0$$

¿Qué error de truncado poseen estos esquemas?

Ejercicio 11 Considerar la ecuación

$$U_t + f(U)_x = 0 \tag{1}$$

y verifique que para U y f suficientemente regular

$$U(t_{n+1}, x_j) = U(t_n, x_j) - \Delta t f(U)_x(t_n, x_j) + \frac{(\Delta t)^2}{2}(f'(U)f(U)_x)_x(t_n, x_j) + O(\Delta t^3)$$

deduzca de aquí el esquema de Lax-Wendroff para la ley de conservación (**??**)

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2}\nu\{(1 - a_{j+1/2}^n\nu)(f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)) + (1 + a_{j-1/2}^n\nu)(f(u_j^n) - f(u_{j-1}^n))\}$$

donde $a_{j+1/2}^n = f'(u_{j+1/2}^n)$, $a_{j-1/2}^n = f'(u_{j-1/2}^n)$. Observe que si $f' = cte$ se obtiene el esquema del ejercicio **??**).

Ejercicio 12 Considerar la ecuación en derivadas parciales de primer orden (caso particular de (**??**) con $f(u) = \frac{u^2}{2}$):

$$U_t + UU_x = 0 \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

con dato inicial

$$U(x, 0) = U_0(x)$$

1. Verifique que la solución queda definida implícitamente por $U = U_0(x - Ut)$.
2. Las curvas características son de la forma $(x(t), t)$ con $x(t) = x_0 + tU_0(x_0)$.
3. Demuestre que $U_x = \frac{U_0'(x-Ut)}{1+tU_0'(x-Ut)}$ y por ende si para algún x_0 es $U_0'(x_0) < 0$ entonces existe un tiempo crítico t_c en el cual deja de existir U_x. Haga la misma cuenta para U_t.

Ejercicio 13 Resolver numéricamente el problema del ejercicio previo.

1. Utilizar como dato inicial $U_0(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$.
   Resolver utilizando el método explícito de primer orden en t:

   $$u_i^{n+1} = u_i^n - \triangle t\ u_i^n \left(\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\triangle x}\right)$$

   ¿Necesita una condición de contorno a la derecha? Utilice $\triangle x = 0.1$. Pruebe con valores de $\triangle t = 0.2$, y $\triangle t = 0.05$. ¿Qué observa?

2. Repetir el análisis para $U_0(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

3. Para el problema del ítem ii) utilizar el esquema explícito con "up-wind":

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \triangle t u_i^n \left(\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\triangle x} \right)$$

   Utilizar $\triangle x = 0.1$, y $\triangle t = 0.1$, $\triangle t = 0.01$, y $\triangle t = 0.001$ Analizar los resultados.

Ejercicio 14 Dada la ecuación $U_t + aU_x = 0$ con $a \in \mathbb{R}$ y $U(x,0) = U_0(x)$ se propone el esquema a tres capas dado por:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

1. Analice que restricción debe imponerse para que se satisfaga la condición CFL.
2. ¿Cómo aproximaría el valor de la solución a tiempo $\triangle t$? ¿Qué condición de borde impondría para resolver el problema numéricamente?
3. Considere $a > 0$ y demuestre que si $\frac{\triangle t}{\triangle x} \leq \frac{1}{a}$ el método resulta estable.
4. Estudie el factor de amortiguamiento y cambio de fase en función de los modos de Fourier.

Ejercicio 15 Considere las siguientes discretizaciones de la ecuación de ondas (para este caso $r = (\frac{\Delta t}{\Delta x})^2$)

$$u_{tt} = u_{xx}$$

$$u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1} = r(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

$$u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1} = \frac{1}{2}r\{(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) + (u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1})\}$$

estudie consistencia y estabilidad de ambos esquemas.

Ejercicio 16 La función u satisface la ecuación:

$$U_{tt} = U_{xx} \qquad x \in [0,1]$$

con condiciones de contorno $U(0,t) = U(1,t) = 0$, $t > 0$ y condiciones iniciales

$$U(x,0) = \frac{1}{8}\sin(\pi x), \quad U_t(x,0) = 0$$

Usar la representación usual de las derivadas segundas, y una aproximación por diferencias centradas para la condición inicial sobre la derivada, para calcular numéricamente una solución para $t = 0.5, t = 1$, con $\triangle x = 0.1$, $\triangle t = 0.1$.

Hallar la solución analítica, y calcular el error de la solución numérica.

Ejercicio 17 i) Escribir la ecuación de onda $U_{tt} = U_{xx}$ como un sistema de dos ecuaciones en derivadas parciales de primer orden (defina $P = U_x$ y $Q = U_t$) .
ii) Discretizar las ecuaciones obtenidas según:

$$\frac{1}{2\triangle x}(p_{i+1,j} - p_{i-1,j}) = \frac{1}{\triangle t}(q_{i,j+1} - \frac{1}{2}(q_{i+1,j} + q_{i-1,j}))$$
$$\frac{1}{2\triangle x}(q_{i+1,j} - q_{i-1,j}) = \frac{1}{\triangle t}(p_{i,j+1} - \frac{1}{2}(p_{i+1,j} + p_{i-1,j}))$$

Probar que esta discretización es estable para $\dfrac{\triangle t}{\triangle x} \leq 1$.